Интервальная факторизация биномиального коэффициента $\binom{2n}{n}$

Геннадий Еремин

argenns@gmail.com

Декабрь, 2016

Аннотация. В статье рассматриваются интервалы простых чисел – делителей центрального биномиального коэффициента. Простые делители распределяются по слоям. Каждый слой состоит из некратных делителей, которые отбираются (не рассчитываются!) из непересекающихся интервалов ряда простых чисел. Кратные простые делители распределяются по различным слоям.

Ключевые слова: Факторизация, центральный биномиальный коэффициент, сегменты Чебышева, слои Лежандра.

Англоязычная версия: http://eremin.xyz/mbc-interval-2016.pdf

1. Введение

1.1. Интервалы Чебышева. Эта статья появилась благодаря работе К. Померанс [1], в которой рассматривается центральный биномиальный коэффициент (ЦБК) $B(n) = \binom{2n}{n}$. Эти коэффициенты находятся в середине четных строк известного треугольника Паскаля. Автор отмечает, что $B(n)$ делится без остатка на произведение всех простых чисел из интервала $(n, 2n)$. Этот факт рассматривал еще Пафнутий Чебышев в 1850 году, поэтому будем называть такой открытый числовой промежуток *интервалом* (*сегментом*) *Чебышева*.

В данной работе мы покажем, что при факторизации ЦБК каждый простой делитель теоретически может быть отнесен к некоторому интервалу Чебышева. Множество всех простых делителей (одиночных и кратных) однозначно разбивается на слои, состоящие из уникальных неповторяющихся факторов. При этом кратные делители распределяются по различным слоям, а каждый слой представляет собой сеть непересекающихся интервалов Чебышева.

ЦБК относят к каталаноподобным специальным числам (Catalan-like numbers), таких как числа Каталана, числа Моцкина, числа Шредера, числа Риордана и др. (см. [2, 3]). Число Каталана и ЦБК связаны известной формулой

$$C(n) = B(n) \big/ (n+1).$$

В работе [4] рассматривается разбиение простых факторов числа Каталана на интервалы Чебышева. В этой статье используется та же методика для факторизации ЦБК. Явная формула ЦБК имеет следующий вид:

$$B(n) = (2n)! \big/ (n!)^2,\ n \geq 0. \tag{1.1}$$

Выпишем начало последовательности ЦБК: 1, 2, 6, 20, 70, 252, 924, 3432, … (см. последовательность A000984). Из (1.1) непосредственно следует:

(a) Простые факторы коэффициента $B(n)$ меньше $2n$, т.е. содержатся в числовом промежутке $(1, 2n)$, такой интервал назовем *факторной базой* $B(n)$. Концы интервала не принадлежат промежутку.

(b) Каждое простое число $p \in (n, 2n) = S_1$ делит $B(n)$ или $p \mid B(n)$. Назовем S_1 − *главный факторный интервал*, поскольку он наибольший в базе $B(n)$.

(c) Любое простое число $p \in S_1$ не является кратным делителем $B(n)$, т.е. $p^2 \nmid B(n)$.

Следующий факторный интервал $S_2 = (½\, n, ⅔\, n)$ является смежным к S_1. В сегменте S_2 все простые числа также делят $B(n)$, и эти факторы также не повторяются. Между S_1 и S_2 образуется свободная от факторов *запретная зона* $[⅔\, n, n]$ − отрезок, все простые числа которого (включая граничные значения) не делят $B(n)$. Поясним сказанное на примере.

Пример 1.1. Факторизация $B(1000)$ дает 217 простых делителей, включая их кратности. Главный факторный интервал (1000, 2000) содержит 135 одиночных простых факторов. Еще 26 неповторяющихся простых делителей есть в соседнем факторном интервале (1000/2 = 500, 2000/3 = 666.6). Между этими сегментами образовалась закрытая запретная зона [666.6, 1000], в этом отрезке нет простых делителей $B(1000)$.

Как видим, с помощью только двух интервалов Чебышева можно отобрать подавляющее большинство одиночных простых делителей ЦБК, не выполняя при этом традиционных вычислений. Очевидно, цепь интервалов Чебышева (разделенных зонами запрета) распространяется на всю факторную базу. Но возникает естественный вопрос, как выбрать оставшиеся одиночные факторы и что делать с кратными делителями? Здесь логично предположить существование идентичных интервалов Чебышева и для кратных факторов.

1.2. Слои Лежандра. Для простого числа p и целого $m > 0$ обозначим $v_p(m)$ кратность p в разложении m (см. [1]). Например, $v_{11}(22) = 1$, $v_{11}(98) = 0$, $v_{11}(23!) = 2$. Такая *функция кратности* легко расширяется на область рациональных чисел:

$$v_p(a/b) = v_p(a) - v_p(b), \text{ если } v_p(a) \geq v_p(b).$$

Хорошо известна формула Лежандра

$$v_p(m!) = \sum_{j \geq 1} \lfloor m/p^j \rfloor \;.$$

Согласно (1.1) для простого числа p

$$v_p(B(n)) = \sum_{j \geq 1} (\lfloor 2n/p^j \rfloor - 2\lfloor n/p^j \rfloor). \tag{1.2}$$

Нетрудно показать, каждое слагаемое в такой сумме может принимать только бинарное значение 0 или 1. Согласно теореме Куммера (см. [1])

$\lfloor 2n/p^j \rfloor - 2\lfloor n/p^j \rfloor = 1$, если и только если дробная часть $\{n/p^j\} \geq ½$, $j \geq 1$.

Равенство (1.2) объясняет разделение множества простых факторов на *слои Лежандра*. Каждый такой слой состоит только из одиночных (неповторяющихся) простых чисел.

Утверждение 1.1. *Пусть p простое число и пусть $\{n/p^j\} \geq ½$. Тогда p распределяется в j-ый слой Лежандра биномиального коэффициента $B(n)$.*

Очевидно, каждый повторяющийся простой фактор распределяется в несколько слоев. Обратим внимание, некоторые одиночные (неповторяющиеся) простые делители могут оказаться не в первом слое Лежандра. Например, для $B(10^6)$ единственный делитель 11 попадает в 6-ой слой.

Для ЦБК с индексом n, все простые делители выше границы $\sqrt{2n}$ являются некратными. Иначе говоря, внутри интервала $(\sqrt{2n}, 2n)$ нет кратных факторов, и все эти делители распределяются только в первый слой (другие слои сюда не «дотягиваются»). Назовем первый слой Лежандра *distinct-layer*. Первый слой наиболее многочисленный, объединяет подавляющее большинство факторов (в том числе и отдельные экземпляры многих кратных делителей). Можно сказать, вся пирамида слоев «обустроилась» на этом нижнем слое, поэтому сначала рассмотрим distinct-layer.

В этой работе рассматриваются только нечетные факторы ЦБК. Единственный четный делитель 2 достаточно просто рассчитать с помощью формулы (1.2). Очевидно, для $B(n)$ общее число слоев Лежандра с нечетными простыми факторами не превышает $\log_3 n$. Формула Лежандра «ответственна» за наполнение слоев, нас в этой статье интересует группирование элементов каждого слоя в интервалы Чебышева.

2. Интервалы Чебышева в distinct-layer

В этом разделе рассмотрим распределение простых делителей ЦБК в слое distinct-layer. Главный сегмент $S_1 = (n, 2n)$ объединяет, по меньшей мере, половину простых факторов $B(n)$. Мы уже упоминали следующий по величине сегмент $S_2 = (½\, n, ⅔\, n)$. Найдем общий вид интервалов Чебышева для первого слоя.

Часто выражение (1.1) упрощают (см. [5]). Отделим в знаменателе четные множители от нечетных:

$$(2n)! = 2\cdot4\cdot6 \cdots 2n \times 1\cdot3\cdot5 \cdots (2n-1) = 2^n \times n! \times (2n-1)!!\,.$$

После сокращения зависимость (1.1) приобретает более практичный для расчетов вид.

$$(2.1) \qquad B(n) = 2^n \times (2n-1)!! \Big/ n! = 2^n \times \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{1\cdot2\cdot3\cdots n}\,.$$

В результате получим следующие две зависимости:

$$v_2(B(n)) = v_2(2^n) - v_2(n!) = n - \sum\nolimits_{j\,\ge\,1} \lfloor n/2^j \rfloor$$

и для нечетных простых факторов

$$(2.2) \qquad v_p(B(n)) = v_p((2n-1)!!) - v_p(n!)$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum\nolimits_{j\,\ge\,1} (\lfloor (2n-1)/p^j \rfloor_{\text{odd}} + 1) - \sum\nolimits_{j\,\ge\,1} \lfloor n/p^j \rfloor,\ \ p > 2.$$

Вычисление кратности простого делителя для нечетного двойного факториала и описание функции *нечетный пол* $\lfloor x \rfloor_{\text{odd}}$ (максимальное нечетное целое число не больше x) см. в [4]. Поскольку нас интересуют интервалы Чебышева (группы смежных простых чисел, а не изолированные простые факторы), мы будем часто использовать формулу (2.1).

Напомним, в главном сегменте $(n, 2n)$ каждое простое число делит $B(n)$. В знаменателе формулы (2.1) последний нечетный множитель n может оказаться простым числом. Поскольку n присутствует в числителе также в единственном числе, то $n \nmid B(n)$. Возможный нечетный множитель $n-1$ также присутствует в одном экземпляре в обоих факториалах, следовательно, и простое число $n-1$ не делит $B(n)$. Положение не изменится до тех пор, пока продвигаясь вниз по факторной базе, мы не достигнем величины $\tfrac{2}{3}n$.

Целое число $\tfrac{2}{3}n$ всегда четно и потому не является простым. Таким образом, любое простое число $\tfrac{2}{3}n < q \le n$ содержится в обоих факториалах (2.1) в единственном экземпляре. Действительно

(a) в факториале $(2n-1)!!$ второй экземпляр q невозможен, так как $3q > 3\times\tfrac{2}{3}n = 2n$;

(b) для знаменателя $n!$ вторая копия $2q > 2\times\tfrac{2}{3}n = n + \tfrac{1}{3}n$ также недопустима.

В случае нечетного простого $p < \tfrac{2}{3}n$ мы получаем второй экземпляр в разложении числителя (2.1) благодаря множителю $3p < 2n$. И если одновременно $p > ½\,n$, то симметричная копия p не появится в разложении знаменателя, поскольку $2p > n$, и в этом случае $p \mid B(n)$. В результате мы получили первую (и, скорее всего, не последнюю) запретную зону $[⅔\,n, n]$, в которой нет простых делителей $B(n)$.

Итак, в разложении двойного факториала $(2n-1)!!$ для нечетного простого числа $p < ⅔\,n$ возникает гарантированная вторая копия благодаря составному множителю $3p < 2n$. Соответственно третья копия простого числа $p < 2n/5$ образуется благодаря множителю $5p < 2n$. Очевидно, k гарантированных копий образуется для простого нечетного $p < 2n/(2k-1) = n/(k-½)$ благодаря множителям $p, 3p, 5p, \ldots, (2k-1)p$. Но, когда $2k-1 \geq p$, число гарантированных копий p превысит k дополнительно за счет кратных множителей $p^2, 3p^2, \ldots, p^3$ и т. д. Поэтому на первое время ограничим для прозрачности и определенности $2k-1 < p$ или $k < p/2 + ½$. Учитывая нечетность p, получаем $k < p/2$.

Таким образом

(2.3) $\qquad v_p((2n-1)!!) \geq k$ для нечетного простого $p < n/(k-½)$.

Очевидно, для $p < 2n/(2k+1) = n/(k+½)$ мы получим дополнительную копию, т. е.

(2.4) $\qquad v_p((2n-1)!!) \geq k+1$ для нечетного простого $p < n/(k+½)$.

На основании (2.3) и (2.4) сформулируем

Утверждение 2.1. *Пусть простое число* $p > 2$ *принадлежит конечному числовому промежутку с открытыми границами* $(n/(k+½), n/(k-½))$, $1 \leq k < p/2$. *Тогда*

$$v_p((2n-1)!!) = k.$$

В утверждении 2.1 границы k-ого интервала могут оказаться целыми числами, но это всегда четные числа. Поэтому границы открыты, т.е. не принадлежат промежутку. Можно получить естественное ограничение для k, логично нижнюю границу интервала ограничить четным значением $p-1$, т. е. $n/(k+½) \geq p-1$. Иначе говоря,

$$n/(p-1) \geq k+½ > k \text{ или } k < n/(p-1) \approx n/p.$$

Рассмотрим теперь факториал $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n$. Для простого числа $p \leq n/2$ мы получаем в разложении гарантированную вторую копию p благодаря множителю $2p \leq n$. В случае $p \leq n/3$ третью копию дает множитель $3p$ и т. д. Для простого числа $p \leq n/k$ мы получим, по меньшей мере, k копий благодаря множителям $p, 2p, 3p, \ldots, kp$. Однако, в случае $k \geq p$ количество копий простого p превысит k за счет дополнительных кратных множителей $p^2, 2p^2, 3p^2, \ldots, p^3$ и т. д. Как и в случае с двойным факториалом введем ограничение для числа копий $k < p$.

Таким образом

(2.5) $$v_p(n!) \geq k \text{ для нечетного простого } p \leq n/k.$$

Соответственно

(2.6) $$v_p(n!) \geq k-1 \text{ для нечетного простого } p \leq n/(k-1).$$

На основании (2.5) и (2.6) сформулируем

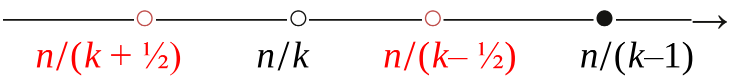
Утверждение 2.2. *Пусть нечетное простое число* $p \in (n/k,\ n/(k-1)]$, $1 \leq k < p$. *Тогда*

$$v_p(n!) = k-1.$$

В данном случае границы полуинтервала объясняются достаточно просто. Для произвольной пары n, k любая из границ может оказаться целым нечетным и, возможно, простым числом. В этом случае верхнее значение $n/(k-1)$ допустимо для p, здесь число копий равно $k-1$. В то время как нижняя граница n/k не включается в промежуток, в этой точке число копий равно k.

В случае $v_p(n!) = 0$ мы получаем условный бесконечный полуинтервал $(n, \infty]$. Дополнительное ограничение для k можно получить, если учесть естественное предельное нижнее значение для полуинтервала: $n/k \geq p$ или $k \leq n/p$.

Рассмотренные числовые промежутки (интервал и полуинтервал) пересекаются друг с другом. Ниже на отрезке прямой показаны граничные точки промежутков (открытые границы обозначены «выколотыми точками», закрытая верхняя граница полуинтервала – сплошной точкой). Границы интервала в двойном факториале показаны красным цветом.



Чтобы получить k-ый сегмент Чебышева первого слоя, достаточно наложить оба участка друг на дружку, т.е. выполнить пересечение интервала из утверждения 2.1 с полуинтервалом из утверждения 2.2:

$$(n/(k+½),\ n/(k-½)) \cap (n/k,\ n/(k-1)] = (n/k,\ n/(k-½))$$

Следующее утверждение декларирует серию интервалов Чебышева для первого слоя.

Утверждение 2.3. *Пусть нечетное простое число* $p \in (n/k, n/(k-½))$, $1 \le k < p/2$. *Тогда*

$$v_p(B(n)) = 1.$$

Для $k=1$ мы получаем первый сегмент Чебышева $S_1 = (n, 2n)$, далее, спускаясь вниз по факторной базе, минуя зону запрета, находим второй сегмент $S_2 = (n/2, 2n/3)$ с одиночными простыми делителями. Мы можем продолжить дальнейший спуск по базе, перебирая другие интервалы Чебышева, чередующиеся с зонами запрета, пока не доберемся до границы кратности $\sqrt{2n}$, ниже которой помимо одиночных простых факторов возможны уже и квадраты (факторы кратности 2), кубы и т.д. В результате получим еще одно ограничение для сегментов из верхней области факторной базы

$$n/k > \sqrt{2n} \text{ или } k < \sqrt{n/2}.$$

В соответствии с теоремой Куммера в слоях Лежандра нет повторяющихся элементов, поэтому ничто не мешает нам продолжить интервалы Чебышева в кратную область факторной базы. Поскольку мы рассматриваем только нечетные простые факторы, то предельное значение нижней границы интервалов сводится к простейшему ограничению:

$$n/k > 2 \text{ или } k < n/2.$$

Сформулируем соответствующую

Теорема 2.1. *Для биномиального коэффициента* $B(n)$ *distinct-layer формируется интервалами Чебышева вида*

$$S_k = (n/k, n/(k-½)), \; 1 \le k < n/2.$$

С помощью теоремы 2.1. нетрудно определить принадлежность простого фактора первому слою. Проверка выполняется в два этапа. Сначала для простого $p > 2$ вычисляется номер подходящего сегмента Чебышева, ориентируясь на нижний конец числового промежутка:

$$k = \lceil n/p \rceil.$$

На втором этапе сравниваем p с верхней границей: p попадает в k-ый сегмент, если

$$p < n/(k-½).$$

Сказанное оформим в виде следствия.

Следствие 2.1. *Пусть* p *– простое нечетное число и пусть* $k = \lceil n/p \rceil$. *Тогда* p *распределяется в* k*-ый интервал Чебышева первого слоя* $B(n)$, *если и только если* $p < n/(k–½)$.

Обратим внимание, неравенство в следствии 2.1 строгое (равенство невозможно), поскольку целое число $n/(k–½)$ всегда четное, составное.

3. Square-layer, cube-layer и другие слои Лежандра

Набор слоев Лежандра с нечетными простыми факторами образует пирамиду. В каждом слое нет повторяющихся элементов, поэтому экземпляры любого кратного простого делителя ЦБК распределяются в различные слои. Первый слой (distinct-layer) наиболее многочисленный и размещается внизу пирамиды, в этом слое аккумулируется абсолютное большинство неповторяющихся простых делителей. В первом слое встречаются и некоторые экземпляры кратных факторов.

Следующий второй слой Лежандра, *square-layer*, собирает большинство простых факторов с кратностью 2 (слой квадратов). Здесь же можно обнаружить экземпляры факторов большей кратности и неповторяющиеся простые делители. Элементы второго слоя размещены в укороченной факторной базе $(1, \sqrt{2n})$. Третий слой, *cube-layer* (слой кубов), объединяет большинство простых факторов с кратностью 3. Соответственно, элементы третьего слоя Лежандра выбираются из интервала $(1, \sqrt[3]{2n})$ и так далее. Для ЦБК с индексом n общее число слоев меньше $\log_3 n$.

В предыдущем разделе на основании зависимости (2.1) мы получили семейство интервалов Чебышева для первого слоя. Главный интервал $(n, 2n)$ непосредственно следует из (2.1). Преобразуем (2.1) применительно к слою square-layer. В соответствии с (1.2) второй слой содержит только те простые факторы p, для которых

$$(3.1) \qquad \lfloor 2n/p^2 \rfloor - 2\lfloor n/p^2 \rfloor = 1 \text{ или } \{n/p^2\} \geq ½.$$

Сократим количество делителей в обоих факториалах формулы (2.1). В данном случае мы работаем с квадратами, поэтому в двойном факториале нас интересуют нечетные множители меньше $\sqrt{2n}$. К примеру, для всех простых $p > \sqrt{2n}$ $\lfloor 2n/p^2 \rfloor = 0$. Соответственно, множители знаменателя следует ограничить величиной $\sqrt{n}$. В результате получим следующее:

$$(2n-1)!! \big/ n! \;\Rightarrow\; (\lfloor \sqrt{2n} \rfloor_{\text{odd}})!! \big/ \lfloor \sqrt{n} \rfloor !$$

$$(3.2) \qquad = 1{\cdot}3{\cdot}5\cdots \lfloor \sqrt{2n} \rfloor_{\text{odd}} \big/ 1{\cdot}2{\cdot}3\cdots \lfloor \sqrt{n} \rfloor .$$

Здесь $\lfloor \sqrt{2n} \rfloor_{\text{odd}}$ – максимальное нечетное целое число, которое меньше $\sqrt{2n}$.

В формуле (3.2) нетрудно увидеть интервал $(\sqrt{n}, \sqrt{2n})$, в котором каждое простое число принадлежит второму слою. Это наиболее продолжительный (главный) интервал в слое square-layer. Очевидно, главный интервал Чебышева в произвольном j-ом слое Лежандра определяется формулой

$$S_1^{(j)} = (\sqrt[j]{n}, \sqrt[j]{2n}), \ j \geq 1. \tag{3.3}$$

Все простые числа в интервале (3.3) принадлежат j-ому слою в разложении ЦБК с индексом n. Дальнейший анализ проведем по аналогии с первым слоем Лежандра.

В знаменателе (3.2), последний множитель $q = \lfloor n^{½} \rfloor$ может оказаться нечетным простым числом. Но тогда q окажется и в числителе и тоже в единственном экземпляре. Поэтому q не принадлежит второму слою. При этом множитель q может делить $B(n)$, если принадлежит первому слою.

Рассмотрим другие множители вида

$$q = \lfloor (n - i)^{½} \rfloor, \ i = 1, 2, \ldots$$

Для начальных значений i, возможное простое число q будет в единственном экземпляре в обоих факториалах. Ситуация не изменится пока $i \leq ⅓\, n$ (отметим, целые числа $(⅔ n)^{½}$ всегда четны и, следовательно, составные). Таким образом, каждое нечетное простое число $(⅔ n)^{½} < q \leq n^{½}$ имеется в обоих факториалах (3.2) в единственном экземпляре, и такие числа не принадлежат второму слою. Действительно, в числителе вторая копия в виде $3q^2 > 3 \times ⅔\, n = 2n$ невозможна, и в знаменателе вторая копия вида $2q^2 > 2 \times ⅔\, n = n + ⅓\, n$ также недопустима.

В результате получена первая запретная зона $[(⅔\, n)^{½}, n^{½}]$ для $B(n)$. Каждое простое число в таком отрезке не принадлежит square-layer, но внутри отрезка могут оказаться элементы других слоев. Общий вид первой запретной зоны для j-го слоя Лежандра следующий:

$$[(⅔\, n)^{1/j}, n^{1/j}], \ j \geq 1.$$

Второй интервал Чебышева в square-layer по аналогии с distinct-layer включает нечетные простые факторы $(½ n)^{½} < p < (⅔\, n)^{½}$. В числителе формулы (3.2) мы получим вторую копию благодаря составному множителю $3p^2 < 3 \times ⅔\, n = 2n$; в то же время как в знаменателе вторая копия в множителе $2\,p^2 > n$ недопустима. В итоге получаем второй интервал

$$S_2^{(2)} = ((½ n)^{½}, (⅔ n)^{½}) \text{ или для } j\text{-го слоя } S_2^{(j)} = ((½ n)^{1/j}, (⅔ n)^{1/j}).$$

Выпишем начальные интервалы Чебышева для второго слоя Лежандра:

$$S_1^{(2)} = ((n/1)^{½}, (n/(1–½))^{½}) \text{ и } S_2^{(2)} = ((n/2)^{½}, (n/(2–½))^{½})).$$

Далее

$S_3^{(2)} = ((n/3)^{½}, (n/(3–½))^{½})$ или для k-го интервала $S_k^{(2)} = ((n/k)^{½}, (n/(k–½))^{½}))$.

Тенденция очевидна, и мы можем написать формулу для k-го интервала Чебышева в j-ом слое Лежандра:

(3.4) $$S_k^{(j)} = ((n/k)^{1/j}, (n/(k–½))^{1/j})).$$

В заключение отметим, для факторизации $B(n)$ нет необходимости просматривать все слои Лежандра, число которых приближается к $\log_3 n$. Обычно достаточно выбрать интервалы Чебышева в несколько нижних слоях пирамиды. Например, факторизация $B(10^6)$ дает 101538 простых факторов, включая кратности. Сегменты нижнего слоя distinct-layer объединяют 101384 простых факторов, из которых 70435 содержатся в главном интервале $(10^6, 2{\cdot}10^6)$. С помощью интервалов слоя square-layer выбираются дополнительно 120 простых делителей. Оставшиеся 34 простых факторов и их кратности нетрудно вычислить по формуле (1.2) или (2.2).

На практике аналитические расчеты проще проводить в рамках небольшого, например, второго ядра $(1, \sqrt[3]{2n})$. В случае миллионного ЦБК это простые делители менее 100, остальные факторы выбираются из сегментов первого и второго слоев.

4. Программный сервис

В заключение рассмотрим небольшой программный комплекс, который позволяет читателю данной статьи выполнить в реальном времени некоторые вычисления по рассмотренной тематике. Ниже приведен перечень нескольких программ с кратким описанием их функций, и эти программы можно стартовать непосредственно из текста статьи.

1) Небольшая вспомогательная программа позволяет получить список простых чисел в небольшом числовом диапазоне; начало диапазона не должно превышать 10^{10}.

2) Следующая программа выполняет интервальную факторизацию ЦБК для заданного индекса n. Простые делители и их кратности даны в возрастающем порядке от 2 и заканчивая простыми числами главного интервала $(n, 2n)$. Старшие множители по возможности группируются в сегменты Чебышева. Простые делители сопровождаются в скобках списком связанных слоев Лежандра. Одиночные (неповторяющиеся) факторы, попавшие в первый слой,

такого списка не имеют. Например, это относится ко всем простым делителям больше $\sqrt{2n}$.

3) Пользователь может получить разбиение на слои всех простых факторов ЦБК. В слоях Лежандра нет повторяющихся элементов. На распечатке можно увидеть, как кратные делители распределяются в различные слои. Слои обрабатываются, начиная с самого верхнего и заканчивая слоем distinct-layer. В списке слоев можно увидеть и пустые, не содержащие элементов.

4) Имеется возможность обработать только один слой Лежандра. Можно вывести отдельно square-layer или cube-layer. Работа с одним конкретным слоем позволяет получить информацию для ЦБК с достаточно большим индексом (миллиард и более).

Благодарности. Выражаю благодарность I. Pak (Mathematics Department at UCLA, USA), автору исторического обзора в последней монографии Р. Стенли за помощь в подборе литературы по данной тематике. Особая благодарность А. Караваеву (Петрозаводский государственный университет, Россия) за полезные дискуссии по интервальной факторизации чисел Каталана и центрального биномиального коэффициента. Также благодарен B. Sagan (Michigan State University, USA) за проявленный интерес к интервалам Чебышева, а также за обсуждение программного сервиса.

Библиография

[1] C. Pomerance, *Divisors of the middle binomial coefficient*, Amer. Math. Monthly **122** (2015), 636–644. https://math.dartmouth.edu/~carlp/amm2015.pdf

[2] M. Aigner, *Catalan-like numbers and determinants*, J. of Combinatorial Theory, Series A, 87 (1999), 33-51.

[3] Hua Sun, Yi Wang, *A Combinatorial Proof of the Log-Convexity of Catalan-Like Numbers*, J. of Integer Sequences 17 (2014), Article 14.5.2 https://studylib.net/doc/10376036/a-combinatorial-proof-of-the-log-convexity-of-catalan-lik...

[4] G. Eremin, *Multilayer factorization of Catalan numbers*, 2016. http://eremin.xyz/catalan-multilayer-2016.pdf

[5] Weisstein, Eric W. Catalan Numbers (Wolfram MarhWorld). http://mathworld.wolfram.com/CatalanNumber.html