

Треугольник Дика в четырехмерном пространстве

Геннадий Еремин

argenns@gmail.com

Июль 30, 2018

Аннотация. Рассматривается связка переменных в путях Дика, которая получена при анализе правильных скобочных последовательностей. В четырехмерном пространстве строится треугольник Дика – целочисленная решетка с путями Дика.

Ключевые слова: правильные скобочные последовательности, диагональные пути Дика, монотонные пути в квадратной решетке, тессеракт, решетка Каталана.

[Англ. версия](#)

1 Введение

В многомерных пространствах (размерности 4 и выше) обычно описываются виртуальные конструкции, которые не связаны с реальными объектами. Рассматривая правильные скобочные последовательности, можно обнаружить тесную взаимосвязь некоторых комбинаторных объектов. Треугольник Дика с диагональными путями [1], треугольник Дика с монотонными путями в квадратной решетке [2] и свертка матрицы Каталана [3] являются двумерными проекциями многомерной целочисленной решетки из первого (положительного) гипероктанта.

Упомянутые объекты перечисляются числами Каталана (последовательность [A000108](#)), и эти числа проявляются во многих задачах дискретной математики [4]. На рис. 1 левая картинка показывает диагональный путь Дика (или «горные хребты») из 12 связанных звеньев, расположенных выше нулевой линии. На правой картинке показана квадратная решетка 6×6 с монотонным путем Дика вдоль ячеек квадрата. Путь начинается в нижнем левом углу и заканчивается в верхнем правом углу, не пересекая диагональ квадрата. Монотонные пути иногда проводят выше диагонали квадрата (зеркальный вариант).



Рис. 1: «Горные хребты» и монотонный путь в квадрате.

Квадрат с монотонными путями интересен тем, что здесь ниже главной диагонали мы имеем привычный треугольник со всевозможными горизонтальными и вертикальными звеньями путей Дика (далее *треугольник Дика*). Именно с таким квадратом мы в дальнейшем будем работать.

Оба пути на рис. 1 идентичны, каждому из них соответствует одна и та же *правильная скобочная последовательность (ПСП)* с шестью левыми и шестью правыми круглыми скобками

$$(1) \quad (((((((())))))))).$$

В каждом начальном фрагменте такого скобочного набора правых скобок (красный цвет) не больше, чем левых. Левая/правая скобка соответствует подъему/спуску в диагональном пути и горизонтальному/вертикальному звену монотонного пути.

Биекция между диагональными путями, монотонными путями и наборами скобок очевидна. Известно, что количество диагональных путей с n подъемами и n спусками, число монотонных путей в целочисленной квадратной решетке $n \times n$ и количество ПСП длины $2n$ равны n -ому числу Каталана. Наверное, и скобочную последовательность можно рассматривать как разновидность путей Дика.

На рис. 1 оба пути прорисованы на плоскости в различных координатных сетках (левый путь содержит только диагональные звенья, на правой картинке таких звеньев нет), и соответственно, каждая сетка имеет свои отличные координаты. Следовательно, треугольник Дика можно рисовать, по меньшей мере, в четырех измерениях. Возникает естественный вопрос, сколько существует видов путей Дика? Очевидно, все зависит от количества возможных координатных сеток и их размерностей.

2 Связка координат

2.1. На плоскостях обычно рисуют две (реже три) координатные оси, остальные координаты для многомерных объектов приходится представлять (изображать) виртуально. В этом отношении правильная скобочная последовательность удобна тем, что есть прямой доступ ко всем координатам.

Вернемся к выражению (1) и начнем перебирать символы слева направо, подсчитывая открывающие и закрывающие скобки. Пусть в произвольной i -ой позиции (в данном случае $i \leq 12$) у нас l левых (left) и r правых (right) скобок. Очевидно, если $i = 12$, то $l = r = 6$.

В общем случае для текущей позиции i справедливо равенство

$$(2) \quad i = l + r, \quad i \geq l \geq r \geq 0.$$

В скобочных наборах часто вводят дополнительную переменную j – *разбаланс скобок*, превышение числа левых скобок над правыми, т.е.

$$(3) \quad j = l - r, \quad l \geq j \geq 0.$$

Линейные равенства (2) и (3) назовем *связкой координат*. Переменные i и l являются *доминирующими*, поскольку в случае обнуления одной из них остальные три переменные автоматически равны нулю. Другие переменные j и r имеют меньший статус, и эти две переменные не зависят друг от друга. Дополнительно отметим, сумма (или разность) переменных i, j четна или равна нулю.

Переменные i, j, l, r – неотрицательные целые числа, поэтому пути Дика располагаются в первом неотрицательном ортанте (гипероктанте) четырехмерного пространства. На рис. 1 в двумерном варианте (двумерные проекции) диагональные пути Дика показаны в коор-

динатной сетке (решетке) $i \times j$, а монотонные пути Дика – в сетке $l \times r$. Читатель может самостоятельно получить диагонально-монотонные пути в решетке $l \times j$ (диагональные подъемы и вертикальные спуски) и монотонно-диагональные пути в решетке $r \times j$ (вертикальные подъемы и диагональные спуски).

Рассмотренные две картинки являются модификациями четырехмерного треугольника Дика в решетке Каталана. Всего двумерных модификаций $\binom{4}{2} = 4!/(2!2!) = 6$. Количество трехмерных модификаций равно $\binom{4}{3} = 4!/(3!1!) = 4$. Таким образом, с решеткой Каталана связано 11 объектов (включая четырехмерную конструкцию). Мы попытаемся получить четырехмерный треугольник Дика, поэтапно отталкиваясь от объектов меньшей размерности.

2.2. Мы уже отмечали, что среди известных двумерных проекций наиболее просты, наглядны и удобны монотонные пути Дика в координатной сетке $l \times r$. На базе этой модификации будем строить треугольники Дика большей размерности. Рассмотрим более подробно монотонный путь из предыдущего рисунка.

На рис. 2 показана квадратная решетка 6×6 , в пределах которой находятся монотонные пути Дика длиной $6 + 6 = 12$. По оси абсцисс отложены левые скобки l , по оси ординат – правые скобки r . Сплошной линией показаны возможные (допустимые) звенья, которые связывают достижимые узлы решетки, образуя тем самым треугольник Дика. Пунктиром отмечены недопустимые звенья решетки, недостижимые узлы опущены. Знакомый путь Дика показан двойной линией.

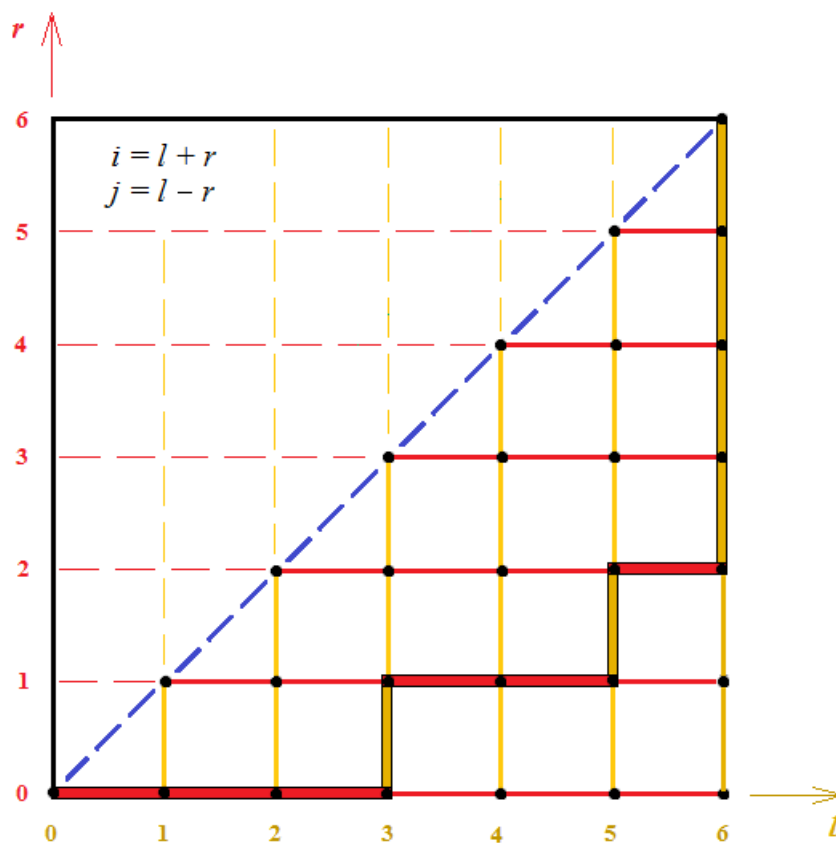


Рис. 2: Монотонный путь Дика в целочисленном квадрате 6×6 .

Рисунок выполнен с использованием нескольких цветов. Желтым цветом показано все, что связано с переменной l , включая ось абсцисс и вертикальные изолинии, l -изолинии, которые проходят через узлы с одинаковой координатой l . Красным цветом отмечено все, что связано с переменной r , включая ось ординат и горизонтальные r -изолинии, объединяющие узлы с одинаковой координатой r . Синим пунктиром мы отметили диагональ, которая проходит через узлы с нулевой координатой j ($l = r$).

Очевидно, ось абсцисс представляет собой нулевую r -изолинию (узлы с нулевой ординатой r). Соответственно, ось ординат – нулевая l -изолиния с единственным достижимым узлом в начале координат. Диагональ квадрата представляет собой нулевую j -изолинию.

Таким образом, на рис. 2 в координатной сетке $l \times r$ треугольник Дика ограничен следующими тремя сторонами или тремя изолиниями: отрезок оси абсцисс длиной 6 (нулевая r -изолиния), вертикальное ребро квадрата (l -изолиния с номером 6) и диагональ квадрата (нулевая j -изолиния). Вершинами треугольника являются три точки квадрата: начало координат и концы вертикального отрезка прямой – узлы (6, 0) и (6, 6). Далее мы будем отслеживать стороны и вершины треугольника Дика, переходя к более сложным модификациям решетки Каталана.

2.3. Общее количество узлов в квадратной решетке 6×6 равно $7^2 = 49$, из них достижимых $1 + 2 + \dots + 7 = 28$. Очевидно, в решетке $n \times n$ число достижимых узлов равно

$$1 + 2 + \dots + (n + 1) = (n + 1)(n + 2)/2.$$

Столько же узлов мы получаем в четырехмерной решетке Каталана и в каждой ее модификации. Достижимый узел однозначно определяется произвольной парой координат, и это следует из линейных равенств (2) и (3). К примеру, если задана пара координат i, j , то другая пара в новой координатной сетке определяется следующим образом:

$$l = (i + j)/2, \quad r = (i - j)/2.$$

Таким образом, между узлами различных модификаций существует *взаимно-однозначное соответствие*. Логично ожидать, что четырехмерный треугольник Дика и его трехмерные модификации – плоские объекты. Этим мы займемся в следующих разделах.

3 Кубическая решетка $n \times n \times n$

Квадрат 6×6 (рис. 2) преобразуется в трехмерный объект, если добавить ось i или ось j . Диапазон значений переменных j, l, r одинаков, поэтому решетка в сетке $j \times l \times r$ размещается в обычном кубе $6 \times 6 \times 6$. В то время как диапазон для переменной i вдвое больше, и в сетке $i \times l \times r$ мы имеем дело с квадратным кубоидом $12 \times 6 \times 6$. Выберем первый вариант, поскольку обычный куб прост и более удобен.

На рис. 3 показан переход к сетке $j \times l \times r$. Синим цветом показано все, что связано с третьей осью. От вершин исходного квадрата проведены ребра куба, параллельные оси j . Достижимые узлы квадрата помечены значением j в соответствии с равенством (3). Также синим цветом показано перемещение узлов квадрата внутрь куба, глубина перемещения соответствует значению меток. Нулем помечены диагональные узлы квадрата (нулевая j -изолиния), и эти узлы не перемещаются внутрь строящегося куба.

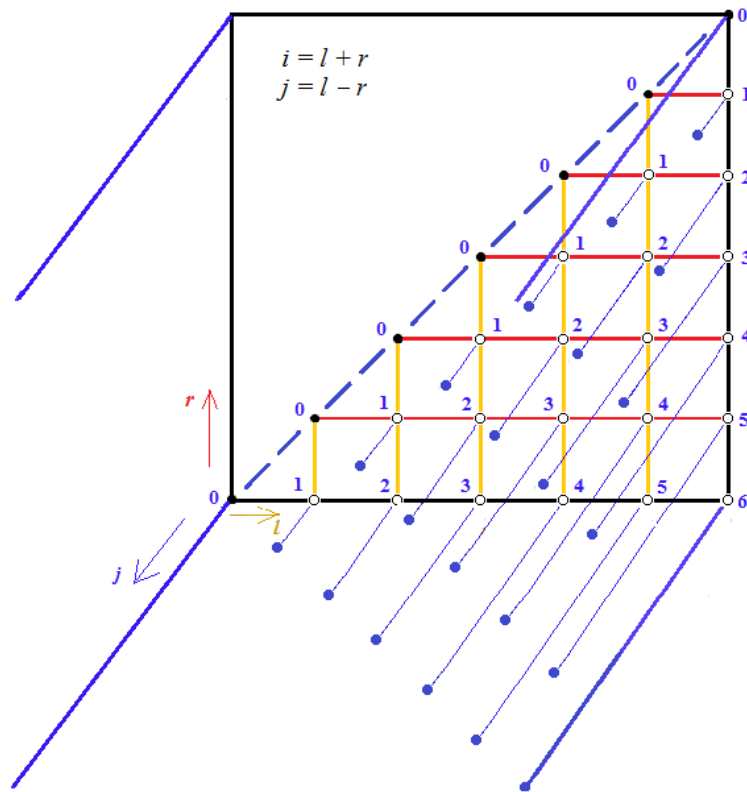


Рис. 3: Переход к кубической решетке $6 \times 6 \times 6$.

Нам остается достроить куб, а именно: нарисовать переднюю грань (которая параллельна исходному квадрату) и провести l -изолинии и r -изолинии внутри куба. Дополнительно повторим путь Дика, но уже в трехмерном пространстве. Результат показан на рис.4.

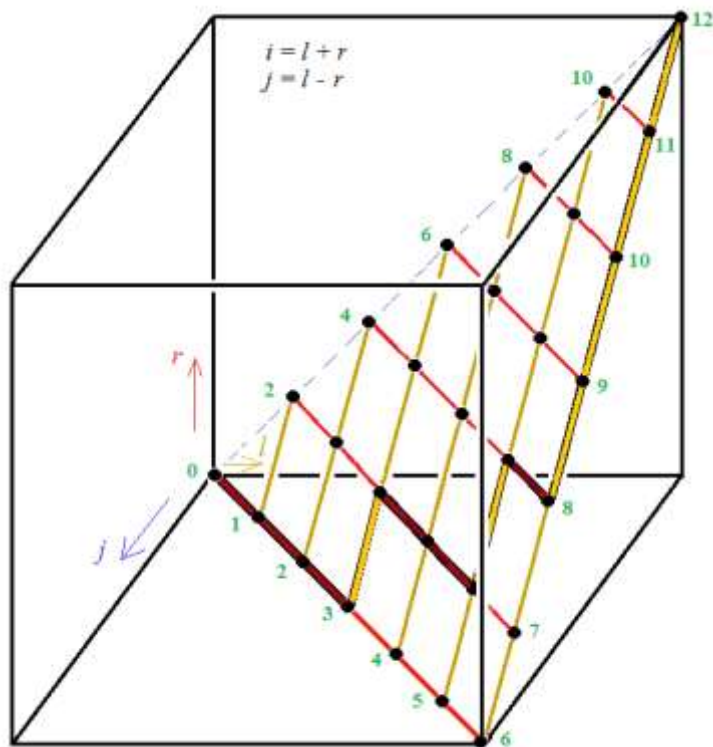


Рис. 4: Треугольник Дика в кубе $6 \times 6 \times 6$.

Ребра квадрата при переходе к кубу преобразуются в грани. В связи с этим горизонтальная и вертикальная стороны треугольника Дика (см. рис. 3) перемещаются на диагонали граней куба. Трехмерный треугольник плоский, поскольку ограничен отрезками прямых – диагоналями трех граней: а) нулевая r -изолиния в нижней грани; в) нулевая j -изолиния (показана пунктиром); б) шестая l -изолиния (грань с точками, для которых $l = 6$).

Рис. 4 не слишком обременен информацией, поэтому, забегая вперед, мы поместили согласно равенству (2) внешние узлы треугольника значением переменной i (сумма координат l и r). Все, связанное с координатой i , здесь и далее показано зеленым цветом.

4 Треугольник Дика в двойном тессеракте $2n \times n^3$

4.1. Добавление четвертой оси i , перпендикулярной осям j, l, r , приводит нас к четырехмерному пространству. Среди четырехмерных фигур наиболее известен [тессеракт](#) (гиперкуб, тетракуб, восьмичейник), который получается, если трехмерный куб сдвинуть в четвертом измерении на дополнительное ребро, соединив затем вершины обоих кубов. В нашем случае четвертое ребро удвоенной длины, поэтому мы имеем дело с четырехмерным параллелепипедом в первом [гипероктанте](#), назовем такой объект *двойной тессеракт*.

На рис. 5 показан переход от трехмерного куба (первый октант в сетке $j \times l \times r$) к двойному тессеракту (первый гипероктант в сетке $i \times j \times l \times r$). Вверху слева приведено выбранное направление осей и повторена связка координатных переменных. Начало координат мы поместили в дальний нижний узел исходного куба. Зеленым цветом помечены части рисунка и данные, связанные с четвертым измерением.

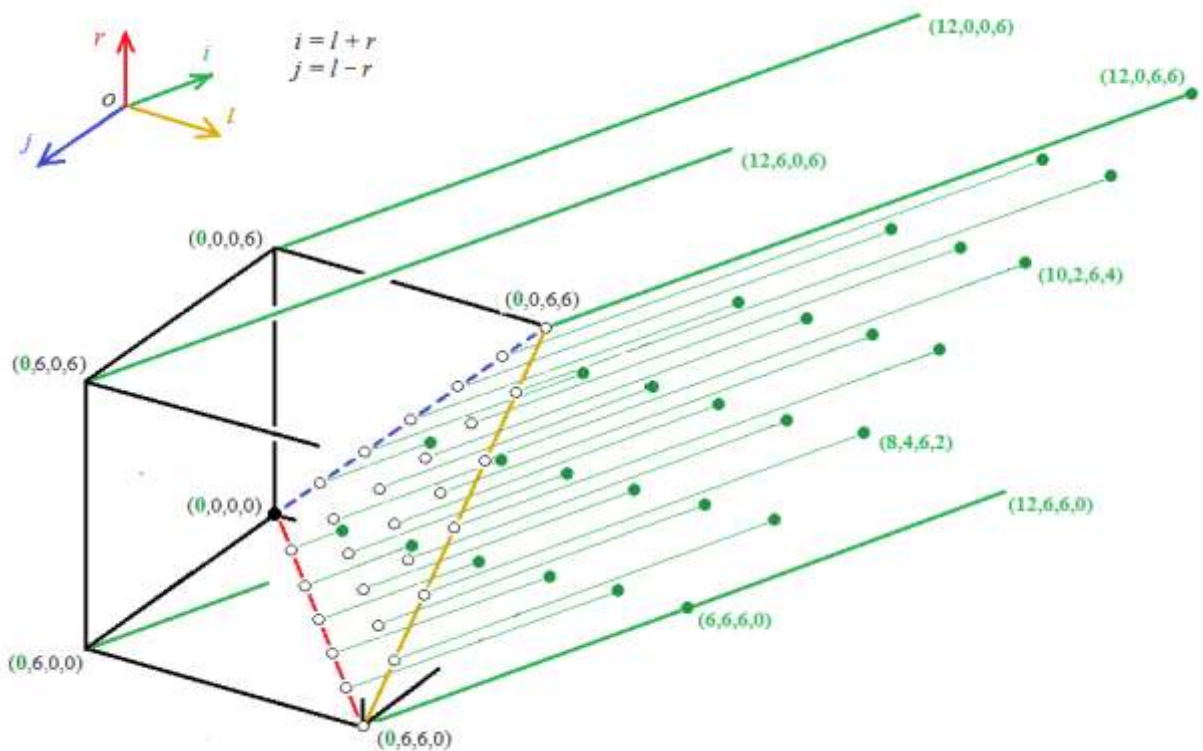


Рис. 5: Переход к двойному тессеракту 12×6^3 .

Для лучшего обзора на рисунке удален передний верхний узел $(0, 6, 6, 6)$, по той же причине закрыт нижний узел $(0, 0, 6, 0)$. Мы показали перемещение достижимых узлов трехмерной решетки внутрь двойного тессеракта в соответствии со значением координаты i (см. рис. 4). Как видим, лишь один узел решетки не перемещается – это начало координат.

4.2. На рис. 6 в координатной сетке $i \times j \times l \times r$ показан полученный двойной тессеракт, внутри которого мы поместили четырехмерный треугольник Дика (повторен и путь Дика). Внутренности треугольника Дика мы слегка затемнили. На картинке для лучшего обзора удалены верхние передние узлы $(0, 6, 6, 6)$ и $(12, 6, 6, 6)$.

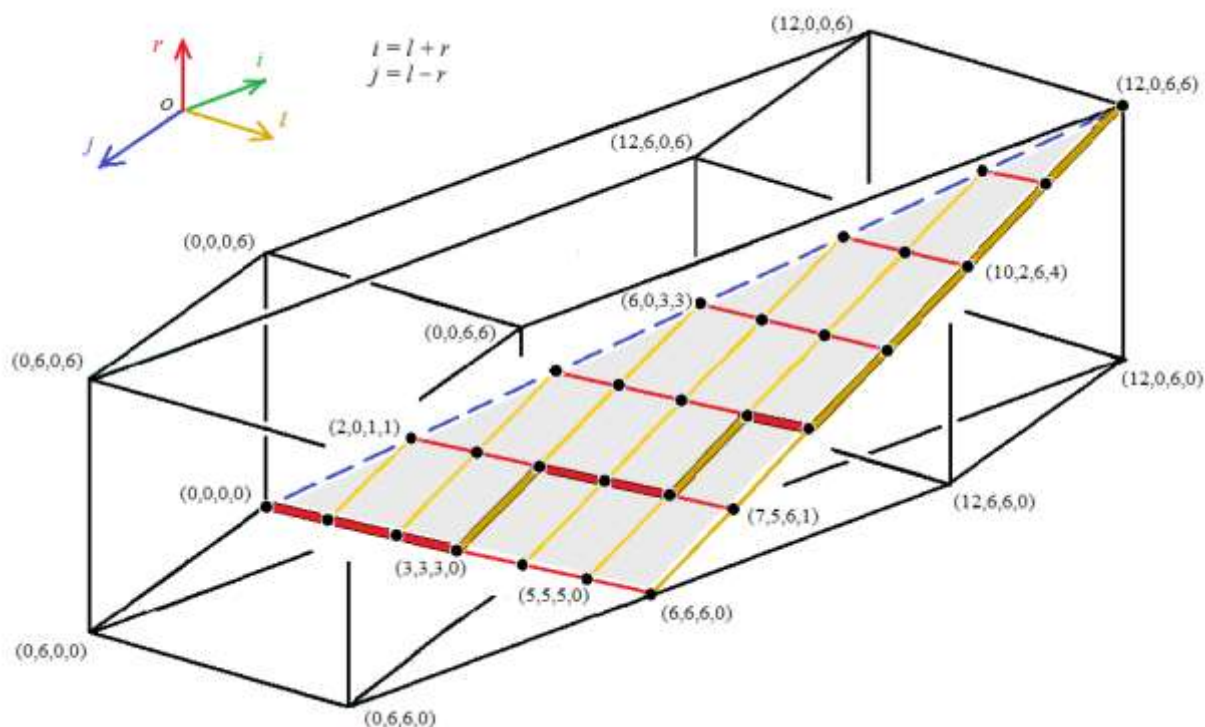


Рис. 6: Двойной тессеракт с треугольником Дика.

В двойном тессеракте (как и в обычном тессеракте) 16 вершин, 32 ребра и 8 трехмерных граней, которые образуются при пересечении тессеракта с восемью гиперплоскостями. В обычном тессеракте все трехмерные грани представляют собой простые кубы. В нашем случае только две грани являются кубами, и эти два куба (левый пониже, правый повыше) отчетливо видны на рис. 6. Остальные шесть трехмерных граней являются правильными (квадратными) параллелепипедами с двумя равными измерениями. У каждого параллелепипеда (трехмерная грань двойного тессеракта) одна пара противоположных граней это квадраты левого и правого кубов.

4.3. На рис. 6 четырехмерный треугольник Дика и все пути Дика из этого треугольника начинаются в начале координат $(0, 0, 0, 0)$ и завершаются в вершине $(12, 0, 6, 6)$. Оба этих узла и еще пять достижимых узлов образуют *синюю сторону* треугольника Дика (нулевая j -изолиния, синий пунктир). Отметим дополнительно *красную сторону* треугольника Дика (нулевая r -изолиния, помечена красным цветом) и *желтую сторону* (шестая l -изолиния, помечена желтым цветом). Несложно показать, что все три стороны треугольника Дика являются прямыми линиями в рассматриваемом четырехмерном пространстве.

Синяя сторона треугольника Дика является диагональю трехмерного правильного параллелепипеда (одна из трехмерных граней двойного тессеракта), который содержит все целочисленные точки двойного тессеракта с координатой $j = 0$. Параллелепипед ограничен восемью вершинами

$$(0, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 6), (0, 0, 6, 6), (0, 0, 6, 0), (12, 0, 0, 0), (12, 0, 0, 6), (12, 0, 6, 6), (12, 0, 6, 0).$$

Другие две стороны треугольника Дика пересекаются в вершине $(6, 6, 6, 0)$ – центр ребра, который соединяет точки $(0, 6, 6, 0)$ и $(12, 6, 6, 0)$. Красная сторона треугольника размещается в правильном параллелепипеде (другая трехмерная грань двойного тессеракта), который содержит все целочисленные точки двойного тессеракта с координатой $r = 0$. Параллелепипед ограничен вершинами

$$(0, 0, 0, 0), (0, 6, 0, 0), (0, 6, 6, 0), (0, 0, 6, 0), (12, 0, 0, 0), (12, 6, 0, 0), (12, 6, 6, 0), (12, 0, 6, 0).$$

Разделим условно этот параллелепипед на два равных куба, и тогда в левом обычном трехмерном кубе красная сторона треугольника Дика станет диагональю, это будет отрезок луча с точками $(n, n, n, 0)$, $n \leq 6$.

Желтая сторона треугольника Дика размещается в параллелепипеде (еще одна трехмерная грань двойного тессеракта), который содержит все целочисленные точки двойного тессеракта с координатой $l = 6$. Параллелепипед ограничен вершинами

$$(0, 0, 6, 0), (0, 6, 6, 0), (0, 6, 6, 6), (0, 0, 6, 6), (12, 0, 6, 0), (12, 6, 6, 0), (12, 6, 6, 6), (12, 0, 6, 6).$$

Если разделить этот параллелепипед на два равных куба, то в правом кубе диагональю станет желтая сторона треугольника Дика.

Прямолинейность сторон треугольника Дика также можно проверить, сравнивая размеры векторов в четырехмерном пространстве. Например, синяя сторона состоит из шести звеньев одинаковой длины $\sqrt{(2^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2)} = \sqrt{6}$. С другой стороны длина синей стороны определяется координатами вершины $(12, 0, 6, 6)$: $\sqrt{(12^2 + 0^2 + 6^2 + 6^2)} = 6\sqrt{6}$.

Аналогично красная сторона включает шесть звеньев длиной $\sqrt{(1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2)} = \sqrt{3}$. Длина всей красной стороны определяется координатами последней вершины $(6, 6, 6, 0)$: $\sqrt{(6^2 + 6^2 + 6^2 + 0^2)} = 6\sqrt{3}$. Такие же величины мы получаем и для желтой стороны треугольника Дика. Из чего следует, что плоский четырехмерный треугольник Дика является еще и равнобедренным.

Рассмотренные ранее модификации (проекции) треугольника Дика и картинка на рис. 6 наводят на мысль, что треугольник Дика прямоугольный, красная и желтая стороны перпендикулярны. Это несложно проверить, вспомним школьную геометрию.

Выберем на рис. 6 три точки $A(5, 5, 5, 0)$, $B(6, 6, 6, 0)$, $C(7, 5, 6, 1)$. Для прямых AB и BC направляющие векторы соответственно равны $(1, 1, 1, 0)$ и $(1, -1, 0, 1)$. Скалярное произведение этих векторов равно $1 \times 1 + 1 \times (-1) + 1 \times 0 + 0 \times 1 = 0$, что доказывает перпендикулярность AB и BC и, соответственно, перпендикулярность красной и желтой сторон треугольника Дика.

Заключение

Таким образом, на рис. 6 мы имеем дело с плоским четырехмерным прямоугольным равнобедренным целочисленным треугольником. Треугольник Дика необычен тем, что связка координатных переменных, повторенная у нас на каждом рисунке, гарантируют независимость любой проекции (модификации). Каждая модификация самодостаточна и способна к реинкарнации в любую другую модификацию (путем смены координатной сетки) вплоть до четырехмерного треугольника.

Трехмерную картинку двойного тессеракта на рис. 6 мы получили, сдвинув обычный куб (рис. 5) в четвертое измерение. Но есть и другая не менее популярная проекция тессеракта на трехмерное пространство. На рис. 7 показана известная [диаграмма Шлегеля](#), которая представляет собой два вложенных трехмерных куба, вершины кубов соединены отрезками прямых. В четырехмерном пространстве внешний и внутренний кубы имеют одинаковые размеры (конечно, визуально это не так). В нашем случае оба куба связаны ребрами удвоенной длины, в результате образуется двойной тессеракт.

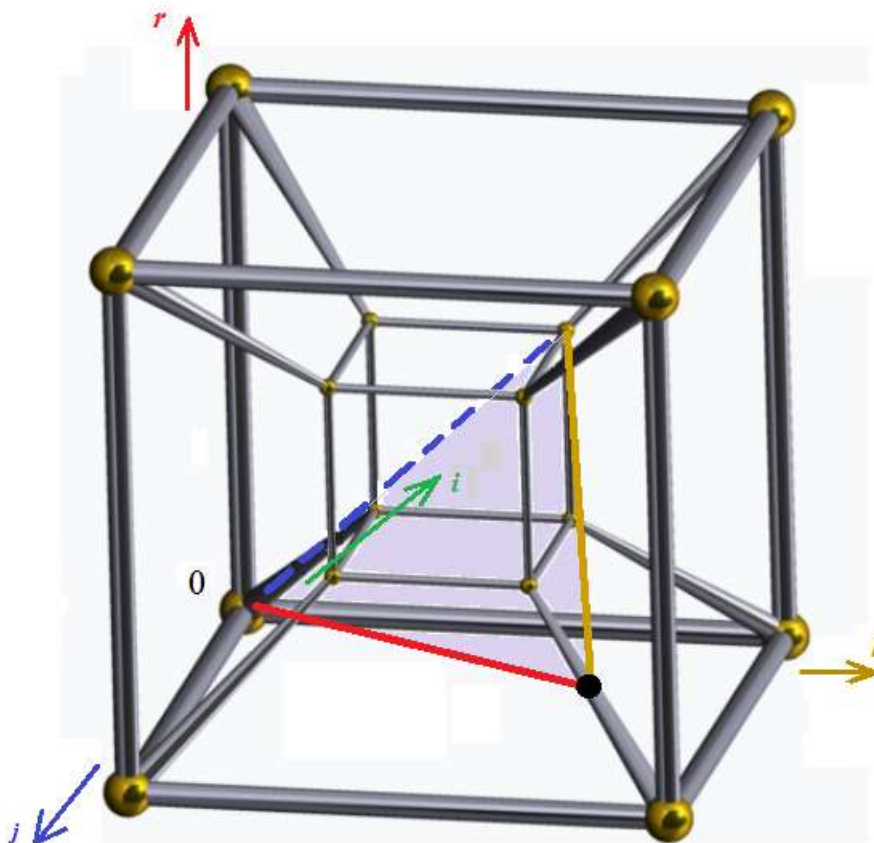


Рис. 7: Диаграмма Шлегеля.

Мы поместили начало координат в нижний левый узел внешнего куба, и три нарисованные оси j , l , r более или менее соответствуют чертежу. Четвертая виртуальная ось i «уходит» как-бы внутрь обоих кубов. Четырехмерный треугольник Дика показан на диаграмме по следующим трем точкам: (1) начало координат, (2) правый дальний узел задней грани внутреннего куба и (3) центр удвоенного ребра, противоположного началу координат.

Можно сказать, что красная и синяя стороны треугольника Дика располагаются на лучах, которые ограничивают решетку Каталана в четырехмерном пространстве.

Библиография

- [1] С. К. Ландо, *Введение в дискретную математику*, МЦНМО, Москва, 2012.
<http://vyshka.math.ru/pspdf/1213/discr/LandoBook.pdf>
- [2] Tom Davis, *Catalan Numbers*, 2015.
<http://www.geometer.org/mathcircles/catalan.pdf>
- [3] David Callan, Emeric Deutsch, *The Run Transform*, *Discrete Mathematics*, **312** (2012), 2927-2937. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X12002233>
- [4] R. P. Stanley, *Catalan Numbers*, Cambridge University Press, 2015.
<http://www.cambridge.org/ro/academic/subjects/mathematics/discrete-mathematics-information-theory-and-coding/catalan-numbers?format=HB>