

Четырехмерная решетка Каталана

Геннадий Еремин

argenns@gmail.com

Февраль 12, 2018

Аннотация. В статье рассматриваются известные объекты дискретной математики, которые являются модификациями четырехмерной решетки Каталана. Подбирая координатные оси решетку можно трансформировать в двумерную или трехмерную конструкцию. Рассматриваются пути в таких модификациях.

Ключевые слова: числа Каталана, решетка Каталана, треугольник Дика, треугольник Каталана, матрица свертки Каталана, пути Дика.

Англоязычная версия: http://eremin.xyz/catalan_lattice-2018.pdf

В дискретной математике хорошо известна пирамида Паскаля, трехмерный аналог треугольника Паскаля. В этой статье в связи с числами Каталана мы рассмотрим многомерные конструкции, напоминающие пирамиду Паскаля.

1 Введение

Числа Каталана появляются во многих задачах комбинаторики. Число Каталана с индексом n определяется по формуле

$$Cat(n) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, \quad n \geq 0.$$

Вот начало последовательности Каталана: 1, 1, 2, 5, 42, 132, 429, ... (см. OEIS [A000108](https://oeis.org/A000108)). Числами Каталана перечисляют многие комбинаторные объекты [1]. Мы сначала рассмотрим наиболее простые и известные из них: *пути Дика* (или «горные хребты») и *монотонные пути* в квадратных решетках.

На рис. 1 (левая картинка) показаны пути Дика из связанных диагональных звеньев, расположенных выше нулевой линии. Монотонные пути (правая картинка) проведены вдоль ячеек решетки. Путь начинается в нижнем левом углу и заканчивается в верхнем правом углу, не пересекая диагональ квадрата.

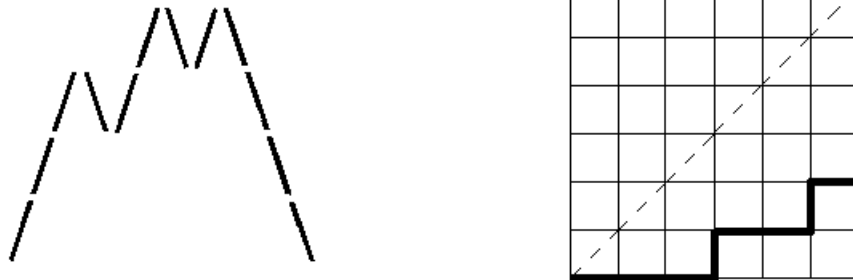


Рис. 1: Соответствие «горных хребтов» и монотонных путей

Биекция между путями Дика и монотонными путями очевидна. Количество диагональных путей с n подъемами и n спусками равно числу монотонных путей в решетке $n \times n$ и равно

n -ому числу Каталана. Обратим внимание, пути Дика содержат только диагональные звенья, а в монотонных путях таких звеньев нет. Исходя из этого, можно допустить, что эти два объекта связывает нечто значимое.

2 Изолинии треугольника Дика

«Горные хребты» обычно рисуют в *треугольнике Дика* в виде направленных *путей Дика*. Путь Дика длины $2n$ (или *полудлины* n) представляет собой цепь связанных диагональных звеньев от начала координат до узла $(2n, 0)$. В цепи n *восходящих* векторов $(1, 1)$ и n *нисходящих* векторов $(1, -1)$. Путь Дика не опускается ниже нулевого уровня.

На рис. 2 показан путь Дика полудлины 6, соответствующий горному хребту на рис. 1. Внизу приведена соответствующая скобочная последовательность (левой сколке соответствует восходящий вектор, правой сколке – нисходящий вектор).

Позиции векторов отложены по оси абсцисс, i -ось (зеленый цвет), а *разбаланс* скобок (превышение числа левых скобок над правыми) указан на оси ординат, j -ось (синий цвет). В координатной сетке $i \times j$ метки присвоены *достижимым* точкам, узлам по которым проходят пути Дика. Недостижимые узлы опущены.

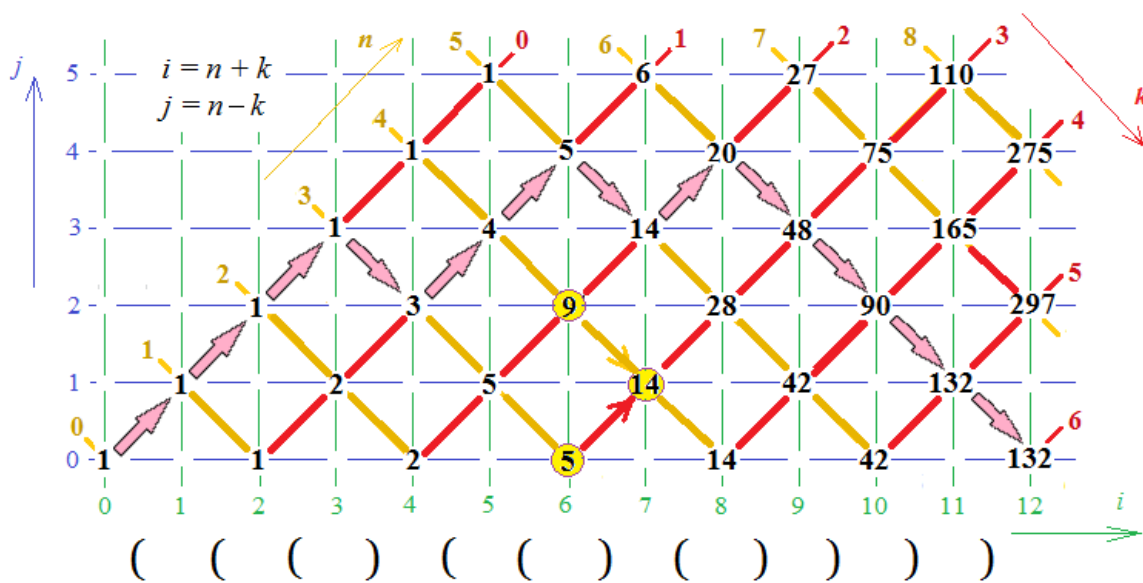


Рис. 2: Треугольник Дика в сетке $i \times j$.

Достижимый узел (i, j) имеет метку (или *динамику*) $d(i, j)$, которая равно количеству путей из точки $(0, 0)$ в точку (i, j) . Справедливо следующее *динамическое уравнение*:

$$d(0, 0) = 1, \quad d(i, j) = d(i-1, j+1) + d(i-1, j-1). \tag{1}$$

В недостижимых узлах динамика равна 0. В двух нижних рядах мы имеем ряд чисел Каталана, $d(2n-1, 1) = d(2n, 0) = \text{Cat}(n)$. Цветом выделены узлы, связанные равенством (1): $d(7, 1) = d(6, 0) + d(6, 2)$. На всех последующих рисунках мы будем повторять путь полудлины 6 и эти три узла.

На рисунке 2 показаны горизонтальные и вертикальные *изолинии*. Горизонтальная линия, j -*изолиния* (голубой цвет), связывает точки с одинаковой координатой j . Соответственно,

вертикальную линию (зеленого цвета) назовем *i-изолинией*. Однако в треугольнике есть и диагональные линии.

Для достижимого узла (i, j) сумма координат четна, запишем это так $i + j = 2n$. Эта сумма равна для всех узлов нисходящей диагонали (желтый цвет), которая начинается в верхней точке (n, n) и заканчивается в нижней точке $(2n, 0)$.

В нисходящей диагонали нижний узел помечен числом Каталана, поэтому логично связать такую диагональ, далее *n-изолиния*, с индексом числа Каталана. На рис. 2 узлы $(6, 2)$ и $(7, 1)$ расположены на 4-ой *n-изолинии*, и эти точки связаны с $Cat(4)$.

Для достижимого узла (i, j) разность координат тоже четно, запишем это так $i - j = 2k$. Разность одинакова для всех точек в восходящей диагонали (красный цвет), которая начинается в точке $(2k, 0)$. Восходящую диагональ назовем *k-изолиния*. Главная диагональ на рис. 2 – это нулевая *k-изолиния*. Узлы $(6, 0)$ и $(7, 1)$ расположены на 3-ей *k-изолинии*.

Таким образом, узел (i, j) находится на пересечении четырех изолиний: (1) *i-ая i-изолиния* (вертикаль), (2) *j-ая j-изолиния* (горизонталь), (3) *n-изолиния* с номером $n = (i + j)/2$ (нисходящая диагональ) и (4) *k-изолиния* с номером $k = (i - j)/2$ (восходящая диагональ). Запишем это в виде равенств:

$$i + j = 2n, i - j = 2k \quad \text{или} \quad i = n + k, j = n - k \quad (i \geq n \geq j, n \geq k). \quad (2)$$

Обратим внимание, в (2) *четыре переменные эквивалентны*: любая пара определяет другую пару. Это позволяет нам работать с другими координатными сетками. Например, на рис. 2 монотонные пути (правая картинка) нарисованы в сетке $n \times k$.

Поэтому, мы можем назвать (2) *координатными равенствами*, и эти равенства мы повторили на рис. 2 в верхнем левом углу. Желтая и красная стрелки показывают направление соответственно виртуальной *n-оси* и виртуальной *k-оси*.

Очевидно, мы имеем дело с некоторой конструкцией в сетке $i \times j \times n \times k$ (далее по возможности будем следовать этому порядку осей). В результате можно записать равенство (1) в виде *обобщенного динамического уравнения*

$$D(0, 0, 0, 0) = 1, D(i, j, n, k) = D(i-1, j-1, n-1, k) + D(i-1, j+1, n, k-1). \quad (3)$$

Соответственно, для выделенных узлов получаем $D(7, 1, 4, 3) = D(6, 0, 3, 3) + D(6, 2, 4, 2)$.

На рис. 2 путь Дика полудлины 6 начинается в начале координат $(0, 0, 0, 0)$ и заканчивается в точке $(12, 0, 6, 6)$. Восходящие векторы лежат на *k-изолиниях* (*n* растет, *k* фиксировано), а нисходящие векторы лежат на *n-изолиниях* (*n* фиксировано, *k* растет). Эта ситуация одинакова для каждого пути в любой координатной сетке.

Определение: Назовем *решеткой Каталана* множество доступных точек, связанных *n-изолиниями* и *k-изолиниями*.

В сетке $i \times j$ решетка Каталана совпадает с треугольником Дика. Меняя координатные оси, можно модифицировать решетку, и каждая модификация будет самодостаточной.

Очевидно, мы можем из произвольной модификации решетки перейти к любой другой. И эта другая модификация может оказаться, например, трехмерной и даже четырехмерной.

На рис. 2 изображена двумерная модификация в сетке $i \times j$, или ij -решетка Каталана. В каждой модификации для нас важен состав осей, а не их порядок. Например, будем считать ij -решетку и ji -решетку идентичными. Тогда, 4-мерная решетка имеет $\binom{4}{2} = 6$ двумерных модификаций и $\binom{4}{3} = 4$ трехмерные модификации.

3 Двумерные модификации решетки Каталана

Мы не будем рассматривать все шесть двумерных модификаций (читатель может их найти в [2]). В этом разделе описаны три координатные сетки:

- а) Сетка $n \times k$ с монотонными путями без диагональных звеньев (противоположность путям Дика).
- б) Сетка $n \times j$ содержит как диагональные звенья, так и отрезки вдоль ребер ячеек сетки. Здесь решетка совпадает со сверткой матрицы Каталана [4].
- с) В сетке $k \times j$ все узлы достижимы. Это единственная решетка не треугольной формы.

3.1. Монотонные пути в сетке $n \times k$.

На рис. 2 по оси абсцисс все узлы вида $(i, 0)$ (или обобщенные узлы $(i, 0, n, k)$) имеют равные виртуальные координаты, $n = k$ (напомним $j = n - k$). Поэтому в сетке $n \times k$ нулевая j -изолиния является главной диагональю с числами Каталана.

Преобразуем рис. 2. Закрутим треугольник вокруг диагонали на 180 градусов, далее повернем по часовой стрелке на 45 градусов. В результате на рис. 3 получим nk -решетку.

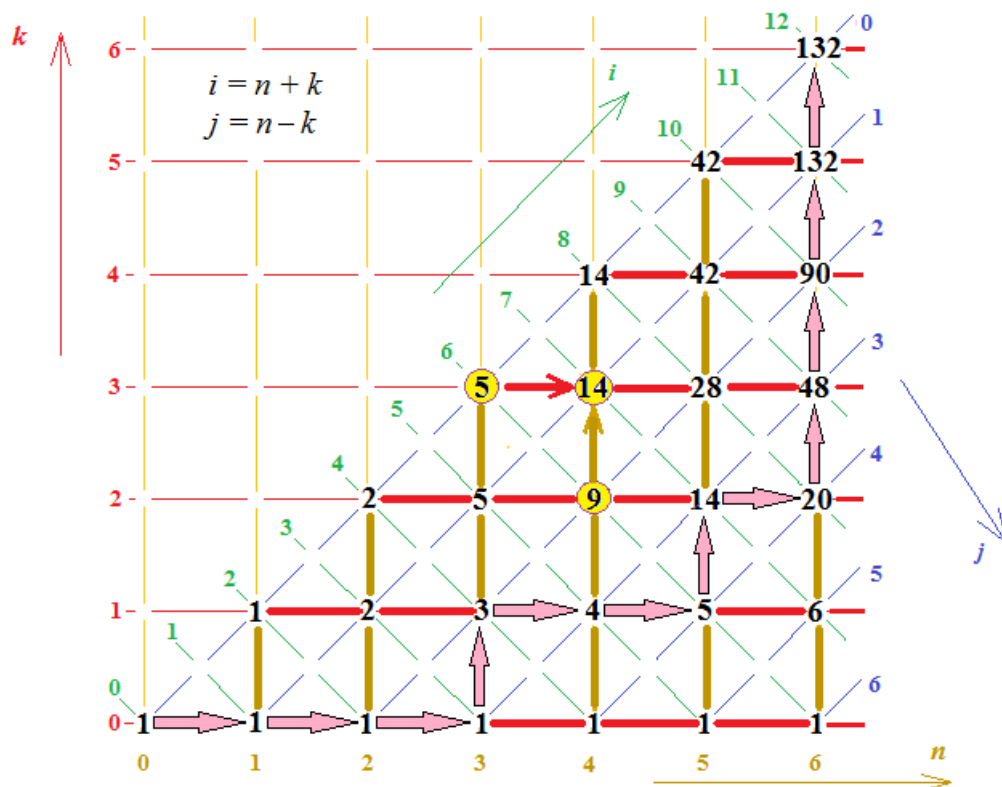


Рис. 3: Монотонные пути в сетке $n \times k$.

В новой модификации i -изолинии и j -изолинии становятся виртуальными (зеленая и синяя стрелки показывают направление виртуальных осей). На пересечении виртуальных изолиний есть недостижимые виртуальные узлы (мы их опустили как и на рис. 2).

На рис. 3, мы повторили путь полудлины 6 и те же три узла. Повторим динамическое равенство для выделенных узлов $D(7, 1, 4, 3) = D(6, 0, 3, 3) + D(6, 2, 4, 2)$.

3.2. Свертка матрицы Каталана в сетке $n \times j$.

На рис. 2 повернем в вертикальное положение n -изолинии вокруг верхних точек; в результате получим модификацию решетки Каталана в сетке $n \times j$ (см. рис. 4). Пунктиром показаны виртуальные i -изолинии (зеленая стрелка показывает ориентировочно направление виртуальной i -оси).

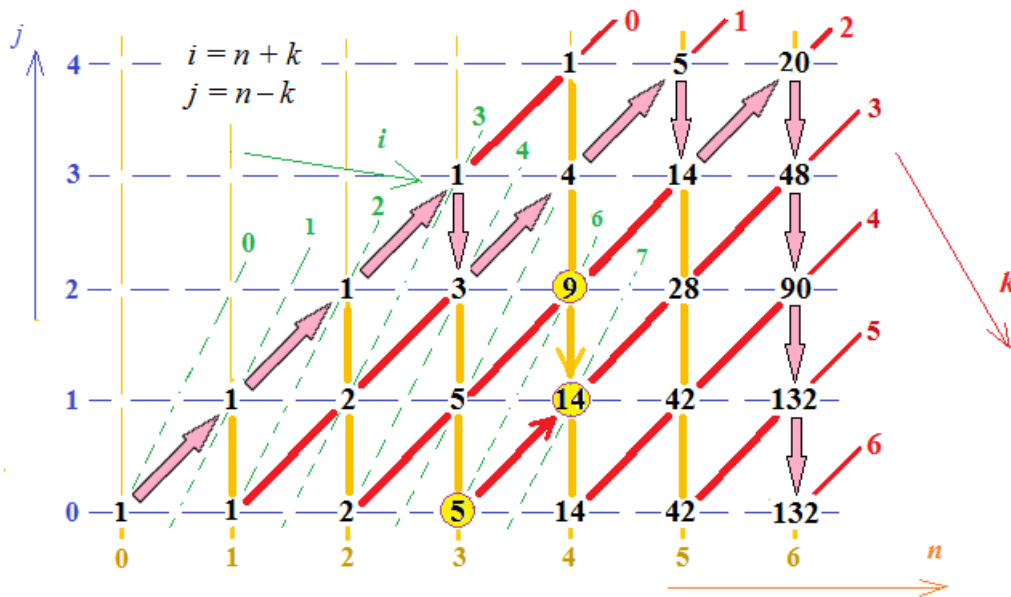


Рис. 4: Свертка матрицы Каталана в сетке $n \times j$.

Путь полудлины 6 несколько изменился, диагональные нисходящие векторы приняли вертикальное положение. Уравнение динамики в обобщенном виде для узла $(7, 1, 4, 3)$ не меняется, поэтому больше не будем его повторять.

В литературе nj -решетка известна как свертка матрицы Каталана [3, 4]. Напишем равенство для элементов матрицы [4, p. 2928] (переменные указаны в соответствии с рис. 4):

$$C_{nj} = \binom{2n-j}{n-j} - \binom{2n-j}{n-j-1}.$$

С помощью равенств (2) упростим выражение, заменив переменные, и дадим его в обобщенном виде:

$$D(i, j, n, k) = \binom{i}{k} - \binom{i}{k-1}.$$

3.2. Решетка Каталана в сетке $k \times j$.

Рассмотренные выше модификации решетки имели треугольную форму. В сетке $k \times j$ ситуация иная; согласно (2) переменные связаны неравенствами: $i \geq n \geq j$ и $n \geq k$.

Как видим, переменные j и k не зависят друг от друга. Из этого следует, что в сетке $k \times j$ решетка Каталана не имеет треугольную форму.

Ниже из рис. 5 видно, что весь первый квадрант сетки $k \times j$ доступен для путей (нет запрещенных точек для красных и желтых изолиний). Зеленым пунктиром показана часть виртуальных i -изолиний, снова опущена часть точек на пересечении i - и j -изолиний.

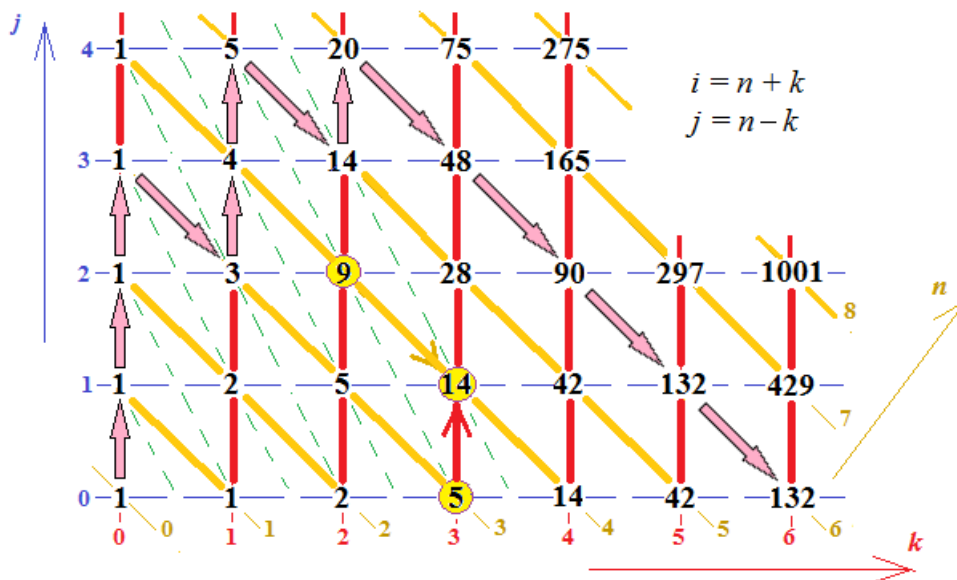


Рис. 5: Решетка Каталана в сетке $k \times j$.

Особо отметим, что недостижимые виртуальные узлы не принадлежат сетке $k \times j$. На рисунке мы снова нарисовали путь полудлины 6 и три выбранные точки.

4 Трехмерные модификации решетки Каталана

Напомним, существуют четыре трехмерные модификации решетки Каталана (повторим, нам неважен порядок координатных осей). Эти модификации достаточно громоздки, и мы отобрали лишь одну из них, на наш взгляд наиболее перспективную. При желании читатель может познакомиться со всеми трехмерными модификациями в [2].

Получить трехмерную модификацию можно из двумерной, если добавить третью ось. Нетрудно видеть, линейные равенства (2) обеспечивают плоскую форму трехмерных модификаций. Очевидно, четырехмерная решетка Каталана также плоская.

Для лучшей ориентации мы будем в трехмерном пространстве для осей и разных изолиний указывать все четыре координаты (три реальных и одна виртуальная).

В некоторых изолиниях есть совпадающие координаты. В каждом таком случае повторяется первая координата из числа совпадающих. Вот несколько примеров:

- $(i, 0, 0, 0)$, $(0, j, 0, 0)$, $(0, 0, n, 0)$, $(0, 0, 0, k)$ – оси в 4-мерном пространстве;
- $(i, i, i, 0)$ – центральный луч, нулевая k -изолиния (набор точек с координатами $i = j = n$);
- $(i, 0, n, n)$ – главная диагональ в сетке $n \times k$ (нулевая j -изолиния, см. рис. 3).

Изолинии показаны различными цветами: i -изолинии зеленые, j -изолинии голубые, n -изолинии желтые и k -изолинии красные.

- [2] G. Eremin, *Dynamics of Balanced Parentheses, II.4D Dyck Triangle and Its Projections*. http://eremin.xyz/dd2-4D_Dyck_triangle-2017.pdf
- [3] Verner E. Hoggatt, Jr., Marjorie Bicknell, *Pascal, Catalan, and General Sequence Convolution Arrays in a Matrix*, *The Fibonacci Quarterly* 14, no. 2 (1976), 135–142. <http://www.fq.math.ca/Scanned/14-2/hoggatt2.pdf>
- [4] David Callan, Emeric Deutsch, *The Run Transform*, *Discrete Mathematics*, **312** (2012), 2927–2937. <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X12002233>