Интервальная факторизация числа Каталана

Геннадий Еремин
argenns@gmail.com

Декабрь, 2016

Аннотация. В статье рассматриваются интервалы простых чисел – делителей, которые возникают в процессе факторизации чисел Каталана. Простые факторы, включая кратные, распределяются по слоям. Каждый слой состоит из уникальных (неповторяющихся) делителей, которые выбираются (не рассчитываются!) из непересекающихся интервалов ряда простых чисел. Кратные простые делители распределяются по различным слоям.

Ключевые слова: Факторизация, число Каталана, модулярная арифметика, Лежандр, Куммер.
Англоязычная версия: http://eremin.xyz/catalan-multilayer-2016.pdf

1. Введение

Как известно, очень большие числа (или *гиперчисла*) сложно факторизовать, т.е. разлагать на простые делители (факторы). Но значительно труднее факторизовать гиперчисла, которые не заданы явно в натуральном виде. Такое происходит со специальными числами, элементами известных числовых последовательностей. Например, в миллионном числе Каталана 600 тысяч десятичных знаков, и его натуральный вид получить сложно. Однако специальным числам, как правило, свойственны внутренние взаимосвязи между элементами соответствующих последовательностей, благодаря этому часто упрощается факторизация таких чисел.

Числа Каталана встречаются в сотнях приложениях (например, см. [1]). Известна формула общего вида элемента последовательности Каталана

$$C(n) = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}, \quad n \geq 0. \tag{1.1}$$

Выпишем начало последовательности Каталана [2]: 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, …
Нам интересны составные числа, т. е. $C(n) > 5$. Поэтому в дальнейшем считаем $n > 3$.
Формулу (1.1) можно упростить для практического применения (см. [3])

$$C(n) = 2^n \times (2n-1)!!\big/(n+1)!, \tag{1.1a}$$

где $(2n–1)!! = 1\cdot3\cdot5\cdots(2n–1)$ – двойной нечетный факториал.

Обозначим $\mathbb{R}$ множество действительных чисел. Из (1.1a) непосредственно следует:

(a) Все простые факторы n-го числа Каталана меньше $2n$, т.е. содержатся в открытом интервале $B = (1, 2n) \subset \mathbb{R}$. Назовем B *фактор-база* числа $C(n)$.

(b) Каждый простой фактор $p \in (n+1, 2n) = S_1$ делит $C(n)$ или $p \mid C(n)$. Назовем интервал S_1 *сегментом* базы B (существуют и другие подобные сегменты).

(c) Простой фактор $p \in S_1$ не является кратным, т.е. $p \mid C(n)$, но $p^2 \nmid C(n)$.

Как правило, сегмент S_1 не единственный в базе B. Во втором (смежном) сегменте $S_2 = (\frac{1}{2}(n+1), \frac{2}{3}n)$ все простые числа делят $C(n)$, и эти делители также не повторяются. Между S_1 и S_2, расположен закрытый отрезок или *запретная зона* $[\frac{2}{3}n, n+1]$. Нетрудно показать, что все простые числа в запретной зоне не делят $C(n)$.

В статье [4] рассматриваются сегменты внутри открытого интервала $B_o = (\sqrt{2n}, 2n)$, которые размещаются в верхней части базы B. B_o не содержит кратных делителей, в то время как небольшой нижний интервал $(1, \sqrt{2n})$ содержит в общем случае и кратные и неповторяющиеся делители $C(n)$. Общий вид таких сегментов следующий:

$$S_k = \left(\frac{n+1}{k},\ \frac{2n}{2k-1}\right),\ k \geq 1. \tag{1.2}$$

Утверждение 1.1. *Пусть* $p > \sqrt{2n}$ *простое число и пусть* $p \mid C(n)$. *Тогда* $p \in S_i$, $i = \lceil (n+1)/p \rceil$.

Отметим, сегменты (1.2) способны отбирать простые факторы на всем интервале $(1, 2n)$. В нижней части базы выбираются как одиночные (неповторяющиеся) простые делители, так и отдельные экземпляры кратных факторов.

В данной работе рассматривается распределение простых делителей числа Каталана на *слои* L_j. При этом в каждом слое нет повторяющихся простых чисел. Часто подобное расслоение не соотносится с кратностью простых факторов. Например, для миллионного числа Каталана одиночный (некратный) делитель 101 из нижней области факторной базы попадает в L_3, а не в L_1 как ожидалось.

Можно сказать, что все простые факторы числа Каталана образуют пирамиду. Нижний слой L_1 самый многочисленный; здесь аккумулируются простые числа из сегментов (1.2). Назовем нижний слой *distinct-layer*, так как здесь собрано абсолютное большинство одиночных простых факторов числа Каталана. Многие простые делители (одиночные и кратные) не включены в L_1. Ниже мы покажем, что для произвольного числа Каталана $3 \notin L_1$. Множество $B \setminus B_o \setminus \{\sqrt{2n}\}$ назовем *ядро* n-го числа Каталана [4]. В ядре содержатся все кратные простые факторы.

В этой статье мы подробно рассмотрим несколько нижних слоев. Следующий второй слой L_2 назовем *square-layer*. Этот слой объединяет большинство квадратов (простые факторы с кратностью 2), но здесь встречаются и другие факторы (как одиночные, так и с кратностью более 2). Делители второго слоя распределены в ядре $B^{(2)} = (1, \sqrt{2n})$, но большинство элементов находятся в интервале $B_o^{(2)} = (\sqrt[3]{2n}, \sqrt{2n})$. В усеченной базе $B^{(2)}$ можно выделить *второе ядро* $B^{(3)} = B^{(2)} \setminus B_o^{(2)} \setminus \{\sqrt[3]{2n}\} = (1, \sqrt[3]{2n})$. Очевидно, во второе ядро попадают все простые факторы с кратностью 3 и более. Общий вид сегмента в $B^{(2)}$ следующий:

$$S_k^{(2)} = \left(\sqrt{\frac{n+1}{k}},\ \sqrt{\frac{2n}{2k-1}}\right),\ k \geq 1.$$

Утверждение 1.2. *Пусть* $p > \sqrt[3]{2n}$ *простое число и пусть* $p^2 \mid C(n)$. *Тогда* $p \in S_i^{(2)}$, $i = \lceil (n+1)/p^2 \rceil$.

Для числа Каталана с индексом n простой одиночный (некратный) делитель менее $\sqrt[3]{2n}$ может оказаться в нижнем слое (distinct-layer), во втором слое (square-layer) или ни в одном из упомянутых. Обычно в реальных расчетах ограничиваются сегментами двух-трех нижних слоев. Непосредственно аналитические расчеты можно проводить в рамках, например, крошечного второго ядра $(1, \sqrt[3]{2n})$. Дополнительно отметим, что в каждом слое сегменты с большими индексами оказываются «пустыми», т.е. без простых чисел. В связи с этим анализ порожних сегментов может оказаться более продолжительным, чем непосредственные расчеты в пределах выбранного миниатюрного ядра.

В общем случае сегмент j-го слоя имеет следующий вид:

$$S_k^{(j)} = \left(\sqrt[j]{\frac{n+1}{k}},\ \sqrt[j]{\frac{2n}{2k-1}}\right),\ k \ge 1, j \ge 1. \qquad (1.3)$$

Утверждение 1.3. *Пусть* $p > \sqrt[j+1]{2n}$ *простое число и пусть* $p^j \mid C(n)$. *Тогда* $p \in S_i^{(j)}$, $i = \lceil (n+1)/p^j \rceil$.

Рассмотрим две функции, которые будут полезны при разложении множества простых факторов числа Каталана на слои.

Функция кратности часто встречается в литературе. Для простого числа p и целого $m > 0$ обозначим $v_p(m)$ кратность p в разложении m (см. [5]). Например, $v_7(14) = 1$, $v_7(98) = 2$, $v_7(6!) = 0$. Функция кратности расширяется на область рациональных чисел

$$v_p(a/b) = v_p(a) - v_p(b), \text{ если } v_p(a) \ge v_p(b).$$

Известна формула Лежандра

$$v_p(m!) = \sum_{i>0} \lfloor m/p^j \rfloor .$$

В соответствии с уравнением (1.1) для чисел Каталана получаем зависимость

$$v_p(C(n)) = \sum_{j>0} (\lfloor 2n/p^j \rfloor - \lfloor n/p^j \rfloor - \lfloor (n+1)/p^j \rfloor).$$

Последнее равенство объясняет разделение простых факторов на слои. Каждое слагаемое суммы принимает два значения 0 или 1. Ненулевое j-ое слагаемое свидетельствует о наличии фактора p в j-ом слое. Назовем такую процедуру – *распределение Лежандра*.

Упростим последнее равенство. Согласно (1.1a) кратность нечетного фактора p равна

$$v_p(C(n)) = v_p((2n-1)!!) - \sum_{j>0} \lfloor (n+1)/p^j \rfloor \ge 0, \quad p > 2. \qquad (1.4)$$

Функция «нечетный пол» (округление вниз к нечетному числу) полезна при работе с двойным нечетным факториалом (см. [4]). Для неотрицательного вещественного числа x обозначим $\lfloor x \rfloor_{\text{odd}}$ максимальное нечетное целое, не превышающее x. Например, $\lfloor 23/7 \rfloor_{\text{odd}} = 3$, $\lfloor 31/7 \rfloor_{\text{odd}} = 3$, $\lfloor 5/7 \rfloor_{\text{odd}} = -1$.

Пусть $p > 2$ простое число, m нечетное целое число, $m > p$, и пусть $k = \lfloor m/p \rfloor_{\text{odd}}$. Тогда

$$v_p(m!!) = v_p((kp)!!\times(kp+2)\times(kp+4)\times\ldots\times m) = v_p((kp)!!) = \tfrac{1}{2}(k+1) + v_p(k!!).$$

Используя итерации (см. [6]), получаем равенство для первого операнда в (1.4)

$$v_p((2n-1)!!) = \tfrac{1}{2} \sum_{j>0} (\lfloor (2n-1)/p^j \rfloor_{\text{odd}} + 1). \qquad (1.5)$$

Замечание. Данная статья появилась благодаря известной теореме Куммера, которая связана с биномиальными коэффициентами (см. [7]). Мы попробуем использовать теорему Куммера для факторизации чисел Каталана.

2. Distinct-layer

Найдем более удобное для расчетов определение первого слоя, который включает абсолютное большинство неповторяющихся простых делителей числа Каталана. В равенствах (1.4-1.5) только первые слагаемые в суммах «поставляют» элементы в нижний слой. Поэтому оставим лишь первые слагаемые сумм, т.е. зафиксируем $j=1$. Тогда для простого числа $p > 2$ получаем следующее *уравнение distinct-layer*:

$$½\left(\lfloor(2n-1)/p\rfloor_{\text{odd}}+1\right)-\lfloor(n+1)/p\rfloor=\begin{cases}1, & \text{если } p\in L_1;\\ 0, & \text{если } p\notin L_1.\end{cases} \qquad (2.1)$$

Равенство (2.1) всегда равно целому числу. Бинарный результат логичен, поскольку произвольное простое число либо принадлежит distinct-layer, либо нет. Нетрудно проверить, для $p\in(n+1, 2n)$ равенство (2.1) равно 1.

Исследуем зависимость (2.1). Для вещественного числа x обозначим дробную часть $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$. (Далее будем особо различать дробную часть $\{x\}$ и одноэлементное множество $\{x\}$.) Очевидно,

$$\lfloor(n+1)/p\rfloor=(n+1)/p-\{(n+1)/p\}.$$

Сложнее обстоит дело с функцией «нечетный пол». Выражение $\lfloor(2n-1)/p\rfloor$ может оказаться ***четным числом*** (четный пол) или ***нечетным числом*** (нечетный пол). Ноль невозможен, поскольку $p<2n$. Рассмотрим каждый случай в отдельности.

Случай 1.

$$\lfloor(2n-1)/p\rfloor = \text{четное число}. \qquad (2.2)$$

Преобразуем (2.1).

$$\begin{aligned}&½\left(\lfloor(2n-1)/p\rfloor-1+1\right)-\left((n+1)/p-\{(n+1)/p\}\right)\\ &\quad=½\left((2n-1)/p-\{(2n-1)/p\}\right)-n/p-1/p+\{(n+1)/p\}\\ &\quad=\{(n+1)/p\}-1/p-½\left(\{(2n-1)/p\}+1/p\right)=0\ (!).\end{aligned} \qquad (2.3)$$

После сокращений получили естественное равенство нулю. Ноль логичен, поскольку полученное выражение гарантировано меньше 1, а отрицательный результат в принципе невозможен. И, все-таки, желательно получить строгое доказательство.

Проанализируем равенство (2.3) с использованием модулярной арифметики (см. [8]). Сначала обратим внимание на коэффициент ½, который допустим только в том случае, если

$$(2n-1) \bmod p = r \quad \text{нечетное число},$$

т. е. $2n-1$ при делении на p дает нечетный остаток $r\le p-2$ (напомним, p нечетно). Это следует из равенства

$$a=p\times q+r.$$

Другими словами, деление нечетного делимого $a=2n-1$ на нечетный делитель p дает нечетный (и ненулевой!) остаток r, если и только если частное $q=\lfloor(2n-1)/p\rfloor$ является четным числом. В результате мы можем упростить второй операнд в (2.3):

$$½\left(\{(2n-1)/p\}+1/p\right)=½\left(\{2n/p\}-\{1/p\}+1/p\right)=½\{2n/p\}=\{n/p\}.$$

Очевидно, $(2n) \bmod p$ – четное число (и не ноль), т.е. эта величина может принимать только значения $2, 4, \ldots, p-1$. Следовательно, справедливо неравенство

$$1 \le (n \bmod p) \le (p-1)/2. \qquad (2.4)$$

Ограничение (2.4) обязательно и для других операндов в равенстве (2.3). Более того, для этих операндов ограничения могут оказаться более жесткими. Это легко проверить. Из неравенства (2.4) следует

$$\{(n+1)/p\} - 1/p = \{n/p\} + \{1/p\} - 1/p = \{n/p\}.$$

Равенство (2.3) доказано. Нетрудно видеть, ограничения (2.2) and (2.4) эквивалентны. Напомним, для числа Каталана многие простые факторы (одиночные и кратные) не попадают в первый слой, а распределяются по другим слоям.

Случай 2.

$$\lfloor (2n-1)/p \rfloor = \text{нечетное число}. \qquad (2.5)$$

Снова преобразуем (2.1).

$$\begin{aligned} &½(\lfloor (2n-1)/p \rfloor + 1) - ((n+1)/p - \{(n+1)/p\}) \\ &\quad = \{(n+1)/p\} - 1/p - ½(\{(2n-1)/p\} + 1/p) + ½ \\ &\quad = \{(n+1)/p\} - 1/p + ½((p-1)/p - \{(2n-1)/p\}) = 0 \text{ или } 1. \qquad (2.6) \end{aligned}$$

Выражения (2.3) и (2.6) отличаются на $½$, поэтому последнее равенство неоднозначно. В (2.6) коэффициент $½$ при последнем операнде возможен, если и только если

$(2n-1) \bmod p$ четно или ноль, так как $p-1$ всегда четное число.

Это согласуется со следующим очевидным фактом: нечетное делимое $2n-1$, разделенное на нечетный делитель p, дает четный остаток (или ноль), если частное $\lfloor (2n-1)/p \rfloor$ нечетно. Таким образом, выражение $(2n-1) \bmod p$ принимает значения $0, 2, 4, \ldots, p-1$.

Очевидно, в правом операнде равенства (2.6) операция вычитания инвертирует модулярные значения, т.е. 0 преобразуется в $p-1$, 2 переходит в $p-3$ и т. д., последним $p-1$ инвертируется в 0. В результате получаем тот же набор величин от 0 до $p-1$. Следовательно, после деления на 2, операнд принимает значения $0, 1, 2... (p-1)/2$. Далее займемся левым операндом $\{(n+1)/p\}$ в равенстве (2.6).

Выражение (2.6) может принимать значение 0 или 1. Ноль означает, что нечетное простое число p не принадлежит нижнему слою для заданного индекса n при выполнении ограничения (2.5). Нетрудно видеть, ноль возможен лишь в двух вариантах:

Вариант 2.1. $n+1 \equiv 0 \pmod p \iff 2n-1 \equiv p-3 \pmod p$.
Вариант 2.2. $n+1 \equiv 1 \pmod p \iff 2n-1 \equiv p-1 \pmod p$.

В каждом варианте даны два эквивалентных, взаимосвязанных модулярных выражения (одно следует из другого). В других вариантах выражение (2.6) не равно 0. Сформулируем теорему, которая фиксирует полученный результат.

Теорема 2.1. *Пусть $p > 2$ простое число. Тогда для n-го числа Каталана p попадает в первый слой, если и только если выполнимы следующие два условия:*

(1) $\lfloor (2n-1)/p \rfloor$ является нечетным числом,
(2) $(n+1) \bmod p > 1$.

Варианты 2.1 и 2.2 уточняют распределение наименьшего простого нечетного фактора 3. Выражение $(2n-1) \bmod 3$ может принимать лишь два допустимых значения $0 = p-3$ и $2 = p-1$. Отсюда очевидно

Следствие 2.1. *Для любого числа Каталана делитель* 3 *не принадлежит первому слою.*

3. Square-layer, cube-layer и другие слои

Аналогично слою L_1 смежный слой square-layer содержит большинство квадратов (простые факторы кратности 2). И это справедливо для всех слоев.

Утверждение 3.1. *j-ый слой аккумулирует абсолютное большинство простых факторов, имеющих кратность j.*

Проясним на примере количественное соотношение элементов в слоях.

Пример 3.1. Факторизация миллионного числа Каталана дает 101543 одиночных и кратных простых факторов (включая семь двоек). Неповторяющихся делителей 101385, из которых 101318 попадают в первый слой (всего же в этом слое 101382 элемента). Число квадратов равно 61, из которых 56 распределены в square-layer (всего во втором слое 120 элементов). Количество кубов (делителей с кратностью 3) равно 6, из которых 5 распределяются в cube-layer.

Факторизация миллиардного числа Каталана дает 1373 простых квадратов, из которых 1341 попадают во второй слой. Количество кубов равно 36, из них 30 распределяются в cube-layer.

В выражениях (1.4-1.5) вторые слагаемые сумм (случай $j=2$) определяют состав второго слоя. Составим *уравнение слоя квадратов* для нечетного простого фактора p.

$$½\left(\lfloor(2n-1)/p^2\rfloor_{\text{odd}}+1\right)-\lfloor(n+1)/p^2\rfloor=\begin{cases}1, & \text{если } p\in L_2;\\ 0, & \text{если } p\notin L_2.\end{cases}$$

Бинарный результат очевиден, так как любое простое число либо принадлежит второму слою или нет. В общем случае *уравнение j-го слоя* имеет следующий вид:

$$½\left(\lfloor(2n-1)/p^j\rfloor_{\text{odd}}+1\right)-\lfloor(n+1)/p^j\rfloor=\begin{cases}1, & \text{если } p\in L_j;\\ 0, & \text{если } p\notin L_j.\end{cases} \quad (3.1)$$

Нетрудно проверить, полученное выражение равно 1 для простого числа из главного сегмента $(\sqrt[j]{n+1}, \sqrt[j]{2n})$. Простое число $p > \sqrt[j]{2n}$ заведомо не принадлежит L_j, поскольку оба операнда в (3.1) равны 0.

Дальнейший анализ проведем по аналогии с нижним слоем distinct-layer. Результаты, полученные в предыдущем разделе, легко трансформируются на square-layer, cube-layer и другие слои. Преобразуем второй операнд в (3.1).

$$\lfloor(n+1)/p^j\rfloor=(n+1)/p^j-\{(n+1)/p^j\}.$$

По-прежнему для функции «нечетный пол» возможны два случая. Значение $\lfloor(2n-1)/p^j\rfloor$ может быть четным или нечетным (ноль невозможен, так как слой j образуют простые факторы $p<\sqrt[j]{2n}$). В случае

$$\lfloor(2n-1)/p^j\rfloor=\text{четное число} \quad (3.2)$$

мы получим уравнение (2.3) в общем виде:

$$\{(n+1)/p^j\}-1/p^j-½\left(\{(2n-1)/p^j\}+1/p^j\right)=0.$$

В окончательном виде с помощью модулярной арифметики получаем неравенство

$$1\le(n \bmod p^j)\le(p^j-1)/2. \quad (3.3)$$

Нетрудно проверить, выражения (3.2) и (3.3) эквивалентны. Остается рассмотреть второй случай

$$\lfloor(2n-1)/p^j\rfloor=\text{нечетное число}. \quad (3.4)$$

В этом случае зависимость (3.1) принимает вид

$$\{(n+1)/p^j\} - 1/p^j + ½\,((p^j-1)/p^j - \{(2n-1)/p^j\}) = 0 \text{ or } 1. \tag{3.5}$$

Полученное выражение представляет собой общий вид зависимости (2.6). Дальнейший анализ равенства (3.5) проведем по аналогии с (2.6).

В (3.5) операнд с коэффициентом ½ правомочен (или допустим), если и только если

$r = (2n-1) \bmod p^j$ четное число или ноль, поскольку p^j-1 четное число.

Таким образом, остаток r может принимать значения $0, 2, 4, \ldots, p^j-1$. Операция вычитания внутри операнда с коэффициентов ½ инвертирует остаток r, т.е. 0 переводится в p^j-1, 2 в p^j-3 и т. д.; наконец, p^j-1 инвертируется в 0. В результате получим прежний набор значений от 0 до p^j-1. После деления на 2, правый операнд в (3.5) принимает значения $0, 1, 2, 3, \ldots (p^j-1)/2$. Далее займемся первым операндом $\{(n+1)/p^j\}$ в (3.5).

Напомним, зависимость (3.5) принимает бинарные значения 0 или 1. Ноль означает, что нечетное простое число p не принадлежит j-му слою для заданного индекса n. Нетрудно видеть, ноль возможен лишь в двух вариантах:

(1) $n+1 \equiv 0 \pmod{p^j} \;\Leftrightarrow\; 2n-1 \equiv p^j-3 \pmod{p^j}$,
(2) $n+1 \equiv 1 \pmod{p^j} \;\Leftrightarrow\; 2n-1 \equiv p^j-1 \pmod{p^j}$.

В каждом варианте мы имеем эквивалентные выражения, вытекающие одно из другого. Сформулируем общую теорему распределения нечетных простых факторов по слоям.

Теорема 3.1. *Пусть $p>2$ простое число. Тогда для n-го числа Каталана p принадлежит слою j, если и только если выполняются следующие два условия:*
(a) $\lfloor(2n-1)/p^j\rfloor$ *нечетное число,*
(b) $(n+1) \bmod p^j > 1$.

С помощью теоремы 3.1 нетрудно получить все нечетные простые факторы (неповторяющиеся и кратные), если обработать все слои. Очевидно, для числа Каталана с индексом n количество слоев не превышает $\log_3 n$.

4. Сервис on-line

В заключение рассмотрим небольшой программный комплекс, который позволяет читателю в режиме on-line факторизовать числа Каталана в достаточно большом диапазоне индексов. Ниже кратко описаны нескольких программ, которые можно запускать непосредственно в данной статье (более подробно программный комплекс описан в [4] и [6]).

1. Для числа Каталана с индексом n эта программа позволяет получить все ядра, начиная с номера $k=\lfloor\log_3 n\rfloor$ и заканчивая первым (главным) ядром. Переходя от одного ядра к другому, программа выводит только дополнительные неповторяющиеся факторы и экземпляры кратных факторов, т. е. расширение последнего ядра.

2. Читатель может получить распределение по слоям простых факторов произвольного числа Каталана. Каждый слой содержит уникальные (неповторяющиеся) простые числа. При этом наглядно показано распределение кратных факторов по различным слоям.

3. Ряд программ выдают лишь один затребованный слой простых факторов. Можно получить отдельно distinct-layer, square-layer или cube-layer. Работая с одним конкретным

слоем, можно получить информацию для чисел Каталана с достаточно большим индексом (миллиард и более). Для компактности старшие простые числа часто группируются в сегменты.

Программный комплекс работает на стороне клиента (браузера), поскольку используются только компоненты HTML, CSS и JavaScript. Программы написаны автором, тексты программ свободно предоставляются читателям – школьникам, студентам, преподавателям учебных заведений. Приветствуется участие желающих в совершенствовании программного сервиса. Еще раз мой e-mail: argenns@gmail.com.

Библиография

[1] Stanley R. P. (2015): Catalan Numbers. Cambridge (2015). http://www.cambridge.org/ro/academic/subjects/mathematics/discrete-mathematics-information-theory-and-coding/catalan-numbers?format=HB

[2] Sloane N. J. A. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. https://oeis.org/A000108

[3] Weisstein E. W. Catalan Numbers (Wolfram MarhWorld). http://mathworld.wolfram.com/CatalanNumber.html

[4] Eremin G. Factoring a Catalan Number into Chebyshev’s Segments (2016). http://eremin.xyz/catalan-cheb-2016.pdf

[5] Pomerance C. *On numbers related to Catalan numbers.* Mathematics Department, Dartmouth College, Hanover (September 2013). https://math.dartmouth.edu/~carlp/catalan

[6] Еремин Г. Факторизация чисел Каталана (2015).

http://eremin.xyz/catalan/

[7] Pomerance C. *Divisors of the middle binomial coefficient.* Amer. Math. Monthly **122** (2015), 636–644. https://math.dartmouth.edu/~carlp/amm2015.pdf

[8] Adamchik V. *Modular Arithmetic.* Concepts of Mathematic (2005). http://www.cs.cmu.edu/~adamchik/21-127/lectures/congruences_print.pdf